

Proyecto EUROPA
Universidad de Cádiz



Prácticas de Matemáticas con Maxima

Matemáticas usando Software Libre

Curso 2008-2009

Autores:

Antonio Jesús Arriaza Gómez
José María Calero Posada
Loreto Del Águila Garrido
Aurora Fernández Valles
Fernando Rambla Barreno
María Victoria Redondo Neble
José Rafael Rodríguez Galván

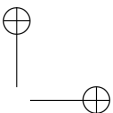
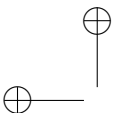
antoniojesus.arriaza@uca.es ✉
josemaria.calero@uca.es ✉
loreto.delaguila@uca.es ✉
aurora.fernandez@uca.es ✉
fernando.rambla@uca.es ✉
victoria.redondo@uca.es ✉
rafael.rodriguez@uca.es ✉

Acción de Innovación Docente:

Código IE-26 en el Registro de Actividades de Innovación Docente



Versión 0.9



Licencia *Creative Commons* by-sa

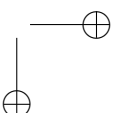
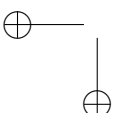
Se permite copiar, distribuir y difundir públicamente esta obra, así como realizar obras derivadas, bajo los siguientes términos:

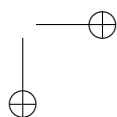
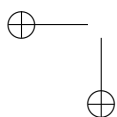
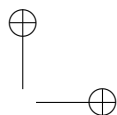
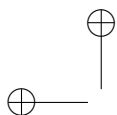
Reconocimiento Debe especificar con claridad que está utilizando el presente documento (o una parte del mismo), identificando su título y autores de forma destacada (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).

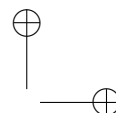
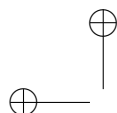
Compartir bajo la misma licencia Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Tiene más información sobre licencias *Creative Commons* en:

<http://es.creativecommons.org/licencia/>

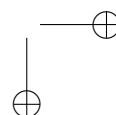
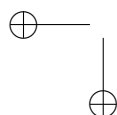


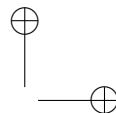
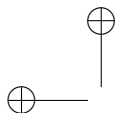




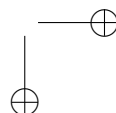
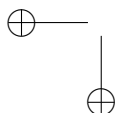
Índice general

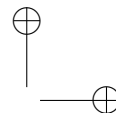
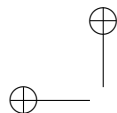
0.1. Introducción	1
I Instalación y primeros pasos	3
1. Primeros pasos con Maxima	5
1.1. Funcionamiento de <i>Maxima</i> y operaciones básicas	5
1.2. Manipulación de expresiones algebraicas	11
1.3. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	14
II Álgebra Matricial	17
2. Álgebra matricial	19
2.1. Matrices	19
III Sucesiones y Series numéricas	27
3. Sucesiones y series numéricas	29
3.1. Sucesiones	29
3.2. Series numéricas	32



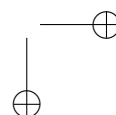
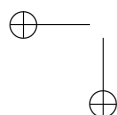


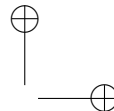
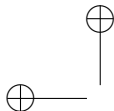
IV Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable	37
4. Estudio de una función real de variable real	39
4.1. Estudio de una función	39
5. Polinomio de Taylor	51
5.1. Polinomio de Taylor	51
6. Cálculo de primitivas, integral definida y aplicaciones	57
6.1. Cálculo de primitivas	57
6.2. Integral definida	60
6.3. Aplicaciones de la integral definida	64
V Cálculo diferencial de funciones reales de varias variables	73
7. Extremos relativos de funciones de dos variables	75
7.1. Definiciones, hessiano, puntos criticos y test	75
7.2. Ejemplo	76
8. Derivadas parciales de funciones de varias variables	83
8.1. Derivadas parciales de funciones de varias variables	83
8.2. Interpretación geométrica de las derivadas parciales	85
9. Derivadas de funciones compuestas	91
9.1. Regla de la cadena	91
9.2. Las funciones componentes vienen definidas de forma explicita . . .	94
9.3. Algunas de las funciones componentes no estan definidas explicita- mente	96
10. Derivadas de funciones implícitas	101
10.1. Usando la regla de la cadena	101
10.2. Derivando directamente la ecuación	104
VI Ecuaciones diferenciales ordinarias	111
11. Comprobando soluciones de ecuaciones diferenciales	113



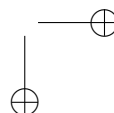
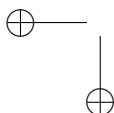


11.1.Soluciones explícitas	113
11.2.Soluciones implícitas	116
11.3.Soluciones de un problema de Cauchy	118
11.4.Soluciones de un problema de contorno	121
12.Integración directa y variables separables	125
13.Ecuaciones homogéneas y exactas	131
14.Ecuaciones Lineales	135
15.Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes	137
16.Movimientos vibratorios	139
17.Ecuación de Cauchy-Euler	143
18.Campos de direcciones	145
18.1.Soluciones de equilibrio	149
19.Funciones especiales	155
19.1.Polinomios de Legendre	155
19.2.Polinomios y funciones de Hermite	156
19.3.Funciones de Bessel	158
20.Soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series	161
20.1.Sumas de series	162
20.2.Soluciones en serie de potencias	167
VII Cálculo Numérico	173
21.Error de redondeo.	175
22.Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 1.	179
22.1.Método de bisección.	179
23.Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 2.	183
23.1.Regula Falsi.	183





24.Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 3.	187
24.1.Método de Newton.	187
25.Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 4.	191
25.1.Método del Punto Fijo.	191
26.Métodos de aproximación de funciones.	195
27.Integración numérica de funciones.	201
27.1.Métodos de integración numérica.	201
28.Resolución numéricas de ecuaciones diferenciales.	207
28.1.Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.	207
29.Métodos de factorización de matrices.	215
29.1.Métodos de factorización de matrices.	215



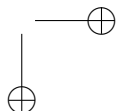
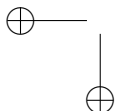
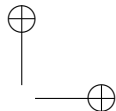
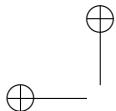
0.1 Introducción

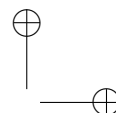
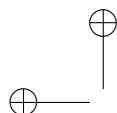
El presente manual ha visto la luz gracias a la colaboración y esfuerzo de siete profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, dentro de un proyecto común junto con tres profesores del Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos, titulado “Aplicación de técnicas de trabajo en equipo a través de Internet para la elaboración de material docente, apoyando el uso de Software libre en el aula” con inquietudes comunes en relación al uso del software libre y ganas de compartir los conocimientos adquiridos y poner en común el trabajo que se ha ido realizando a este respecto desde hace varios años, para mejorar la calidad de nuestra docencia. Todos hemos trabajado con la convicción de que la realización de proyectos comunes con licencia libre constituye la manera natural para abordar con garantías de calidad las iniciativas relacionadas con la docencia.

Desde este punto de vista surge el manual, que reúne un compendio de materias coincidentes en las asignaturas de primeros cursos, adscritas al Departamento de Matemáticas, de distintas Titulaciones de la Universidad de Cádiz. En este sentido, se trata de una guía de prácticas, usando el programa libre Maxima, para su utilización en las clases impartidas en el aula de informática, de las asignaturas correspondientes.

Comentar que no hemos pretendido que sea un manual general de conocimientos, como los muchos que existen ya usando el programa Maxima, sino hemos querido proporcionar una serie de prácticas concretas y preparadas para su uso directo en las clases de ordenador, de las asignaturas con programas comunes que impartimos.

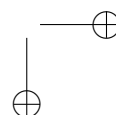
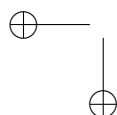
Por último, nos gustaría señalar que ha sido muy enriquecedora y constructiva esta experiencia, que nos ha permitido trabajar en equipo gracias a la utilización del programa de control de versiones Subversion y en la que seguiremos esforzándonos para mejorar y perfeccionar el presente manual.

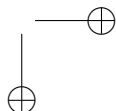
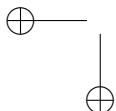
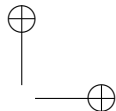
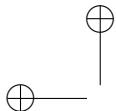


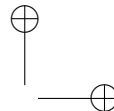
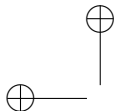


Parte I

Instalación y primeros pasos







1

Primeros pasos con Maxima

Contenidos



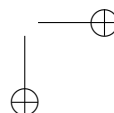
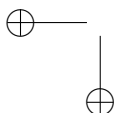
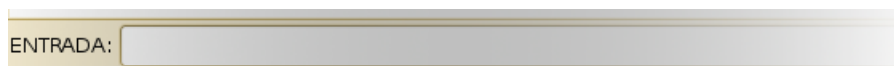
1. *Maxima* y el entorno *wxMaxima*
2. Operaciones básicas: *Maxima* como una calculadora científica
3. Representación decimal de números reales
4. Manipulación de expresiones algebraicas
5. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

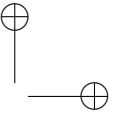
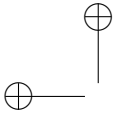
1.1 Funcionamiento de *Maxima* y operaciones básicas

Al arrancar *Maxima*, el programa se detendrá a la espera de que escribamos una instrucción. Para ello, escribimos la orden correspondiente y a continuación pulsamos la tecla `Intro`. *Maxima* procesará la orden y nos devolverá una respuesta.

wxMaxima

Si estamos utilizando *Maxima* a través de la interfaz “*wxMaxima*”, contaremos con una zona especial etiquetada “ENTRADA”, que deberemos utilizar para teclear las órdenes:





Esta zona cuenta con algunas posibilidades interesantes, por ejemplo se pueden emplear las flechas del teclado ($\uparrow$, $\downarrow$) para recuperar las órdenes anteriores y la tecla “tabulador” $\Rightarrow$ para auto-completar una orden que hayamos tecleado anteriormente.

Por ejemplo, si escribimos la orden $2+2$, *Maxima* nos devolverá la respuesta 4 y en la pantalla observaremos lo siguiente:

```
( %i1)  2+2;  
( %o1)  
4
```

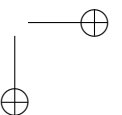
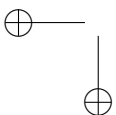
Como se puede observar, el programa antepone a la orden que hemos escrito ($2+2$) una etiqueta de la forma (%i1) (indicando la entrada o “input” número 1). Del mismo modo, se antepone a la respuesta (4) una etiqueta de la forma (%o1) (indicando la salida o “output” número 1).

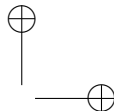
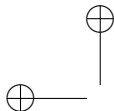
Las siguientes entradas que tecleemos y sus respectivas salidas se etiquetarán como (%i2), (%o2), etc. En cualquier momento, podemos hacer referencia a una entrada anterior o a su correspondiente salida, utilizando etiquetas del tipo %iN u %oN, donde N es el número de entrada/salida al que deseemos acceder. Por ejemplo:

```
( %i2)  333+222;  
( %o2)  
555
```

```
( %i3)  333-222;  
( %o3)  
111
```

```
( %i4)  %o2+%o3;  
( %o4)  
666
```





La etiqueta % siempre hace referencia a la última salida. Como fin de línea, se usa el símbolo ; (aunque si usamos *wxMaxima* no es necesario teclearlo, pues es insertado automáticamente). También podemos utilizar el símbolo \$ y en este caso no se presenta en pantalla el resultado, como se puede apreciar en ejemplos posteriores.

Operaciones básicas: usando *Maxima* como una calculadora

Para las operaciones básicas, se utilizan los operadores +, -, *, / y ^ (para expresar potencias). Para obtener en pantalla este último símbolo, podemos pulsar la tecla $\wedge$ y a continuación la barra espaciadora del teclado. Por ejemplo:

```
(%i5) 27*31;  
(%o5)  
837
```

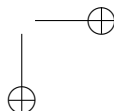
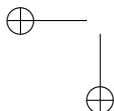
```
(%i6) 12-29/3;  
(%o6)  
 $\frac{7}{3}$ 
```

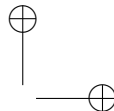
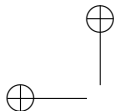
```
(%i7) 2^10;  
(%o7)  
1024
```

```
(%i8) 15^%o6;  
(%o8)  
225  $15^{\frac{1}{3}}$ 
```

Como se puede observar, *Maxima* opera de forma simbólica, utilizando aritmética racional y no realizando aproximaciones numéricas, salvo que se especifique lo contrario. Por defecto, simplifica las fracciones y potencias numéricas, como en (%o6) y (%o8).

Es muy importante tener en cuenta el orden en el que se realizan las operaciones: en primer lugar, ^, a continuación * y / y por último + y -. Las operaciones





de igual procedencia se evalúan de izquierda a derecha, por ejemplo, la siguiente operación se entiende como $\frac{2}{3} \cdot 5$ y no como $\frac{2}{3 \cdot 5}$:

```
(%i9) 2/3*5;  
(%o9)
```

$$\frac{10}{3}$$

Por tanto, con frecuencia, deberemos utilizar los paréntesis para modificar el orden de evaluación, como en el siguiente ejemplo, en el que escribimos la operación $\frac{8-5}{3 \cdot 4}$:

```
(%i10) (8-5)/(3*4);  
(%o10)
```

$$\frac{1}{4}$$

En la sesión anterior, se puede apreciar que *Maxima* ha simplificado el resultado. Si no hubiésemos utilizado los paréntesis, el resultado habría sido distinto:

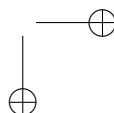
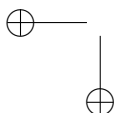
```
(%i11) 8-5/3*4;  
(%o11)
```

$$\frac{4}{3}$$

La salida anterior se corresponde con el valor de la operación $8 - \frac{5}{3} \cdot 4$, y no con $\frac{8-5}{3 \cdot 4}$.

Asignaciones, constantes y funciones básicas: una calculadora científica

El operador `:` se utiliza para asignar a una variable el valor de una expresión (el signo `=` no se utiliza para asignación, sino para ecuaciones). La función `kill` es usada para eliminar variables que hayan sido asignadas previamente (o todas ellas, usando `kill(all)`).



```
(%i12)  a:3;
(%o12)

3
```

```
(%i13)  b:4;
(%o13)

4
```

```
(%i14)  a^2+b^2;
(%o14)

25
```

```
(%i15)  kill(a)$
(%i16)  kill(b)$
```

Maxima tiene una serie de constantes predefinidas, como π , e ó i (la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$). Para ello se emplean, respectivamente, los símbolos `%pi`, `%e`, `%i`. Por otro lado, existe una gran cantidad de funciones predeterminadas, como las que se muestran en la figura 1.1.

En cuanto a nombres de variables, constantes y funciones, es importante advertir que **Maxima distingue entre mayúsculas y minúsculas**. Por ejemplo, una variable `a` es distinta de otra `A`, y la expresión `cos(0)` no es igual a `1`.

Representación decimal de números

Para obtener la representación decimal de un número podemos utilizar la función `float` (o añadir `,numer`). En *wxMaxima*, también podemos usar el menú `Numerico` $\rightarrow$ `A real (float)`.

```
(%i17)  float(%pi);
(%o17)

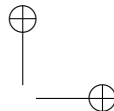
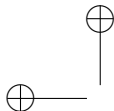
3,1415926535897931
```

```
(%i18)  %pi,numer;
(%o18)

3,1415926535897931
```

FUNCIÓN <i>Maxima</i>	DESCRIPCIÓN
<code>abs (x)</code>	Valor absoluto de x
<code>acos (x)</code>	Arco coseno de x
<code>acosh (x)</code>	Arco coseno hiperbólico de x
<code>asin (x)</code>	Arco seno de x
<code>asinh (x)</code>	Arco seno hiperbólico de x
<code>atan (x)</code>	Arco tangente de x
<code>atanh (x)</code>	Arco tangente hierbólica de x
<code>csc (x)</code>	Cosecante de x
<code>cos (x)</code>	Coseno de x
<code>cosh (x)</code>	Coseno hiperbólico de x
<code>cot (x)</code>	Cotangente de x
<code>exp (x)</code>	Función exponencial, e^x
<code>floor (x)</code>	Parte entera de x ($p \in \mathbb{Z} / p \leq x < p + 1$)
<code>log (x)</code>	Logaritmo neperiano de x
<code>max (x1, x2, x3, ...)</code>	Máximo de $x_1, x_2, x_3...$
<code>min (x1, x2, x3, ...)</code>	Mínimo de $x_1, x_2, x_3...$
<code>sin (x)</code>	Seno de x
<code>sinh (x)</code>	Seno hiperbólico de x
<code>sqrt (x)</code>	Raíz cuadrada de x
<code>tan (x)</code>	Tangente de x
<code>tanh (x)</code>	Tangente hiperbólica de x
<code>x!</code>	Factorial de x

Figura 1.1: Algunas funciones predefinidas en Maxima



Pero si en vez de `float` utilizamos la función `bfloat`, podremos seleccionar el número de dígitos que se representarán. Este número está controlado por la variable `fpprec` (cuyo nombre proviene de *floating point precision*), y por defecto es igual a 16. En *wxMaxima*, podemos utilizar el menú `Numerico` $\rightarrow$ `A real grande` (`bigfloat`) para cambiar este valor.

```
(%i19) x:%pi$
(%i20) bfloat(x);
(%o20)
3,141592653589793B × 100

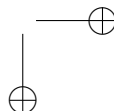
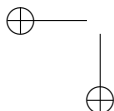
(%i21) fpprec:50;
(%o21)
50

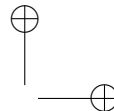
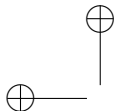
(%i22) bfloat(x);
(%o22)
3,1415926535897932384626433832795028841971693993751B × 100

(%i23) kill(all);
(%o0)
done
```

1.2 Manipulación de expresiones algebraicas

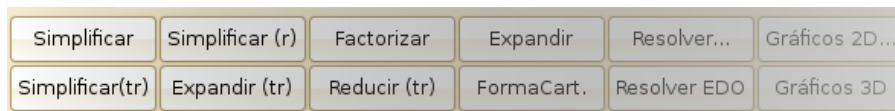
Existe un gran número de funciones relacionadas con la manipulación de ecuaciones y expresiones algebraicas, algunas de las cuales se muestran en el siguiente ejemplo: `expand` (desarrolla expresiones en varios términos), `ratsimp` (agrupa en fracciones con denominador común), `factor` (factorizar expresiones).





wxMaxima

En wxMaxima se puede acceder a las funciones anteriores a través del ratón, mediante el menú *Simplificar* o mediante los botones *[Expandir]*, *[Simplificar]* y *[Factorizar]* (respectivamente).



El número de botones disponibles en este área se puede aumentar, seleccionando la opción “Panel con botones”: “Completo”, en el menú *Editar* → *Preferencias*.

(%i1) `(x+y)^3;`

(%o1)

$$(y + x)^3$$

(%i2) `expand(%);`

(%o2)

$$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

(%i3) `%, x=1/y;`

(%o3)

$$y^3 + 3y + \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3}$$

(%i4) `ratsimp(%);`

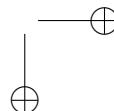
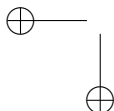
(%o4)

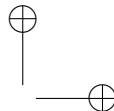
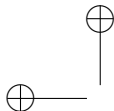
$$\frac{y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 1}{y^3}$$

(%i5) `factor(%);`

(%o5)

$$\frac{(y^2 + 1)^3}{y^3}$$





Como se observa en el ejemplo anterior (entrada (%i3)), en *Maxima* se puede sustituir cualquier expresión, $e1$, por otra, $e2$, añadiendo una coma y a continuación una indicación del tipo $e1=e2$. También se puede utilizar la función `subst`, de la forma `subst(e2,e1,%)`. Esta función está disponible en *wxMaxima*, a través del menú **Simplificar** → **Sustituir...** y a través del botón¹ [Sustituir...]

Las expresiones trigonométricas tienen, además, funciones propias: `trigexpand` (aplica las propiedades trigonométricas de suma de ángulos para que los argumentos contenidos en las funciones sean lo más simples posibles) y `trigreduce` (aplica las propiedades en sentido contrario, de modo que no haya términos que contengan productos funciones seno o coseno). Estas funciones están, respectivamente, disponibles en el menú **Simplificar** → **Simplificación trigonométrica** → **Expandir trigonometría...** y **Simplificar** → **Simplificación trigonométrica** → **Reducir trigonometría...**, así como de los botones [Expandir (tr)] y [Reducir (tr)].

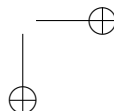
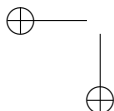
```
(%i6) cos(x)^2*sin(x+y);
(%o6) (cos x)^2 sin(y + x)

(%i7) expand(%);
(%o7) (cos x)^2 sin(y + x)

(%i8) trigexpand(%);
(%o8) (cos x)^2 (cos x sin y + sin x cos y)

(%i9) trigreduce(%);
(%o9)  $\frac{\sin(y + 3x) + \sin(y - x)}{4} + \frac{\sin(y + x)}{2}$ 
```

¹Solamente disponible si se utiliza el panel de botones “Completo”.



1.3 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

En *Maxima*, el signo = se utiliza para definir ecuaciones. Los sistemas de ecuaciones se definen como listas de ecuaciones (entre corchetes). La función `solve(ecuaciones, incógnitas)` devuelve una lista formada por las soluciones de la ecuación (o sistema de ecuaciones) `ecuaciones`, donde la incógnita (o lista de incógnitas) viene dada por `incógnitas`. En *wxMaxima*, se puede acceder a esta función a través del menú **Ecuaciones** → **Resolver...** o bien del botón **[Resolver...]**

```
(%i10) x^2+x-3=0$
```

```
(%i11) solve(%, x);
```

```
(%o11)
```

$$\left[x = -\frac{\sqrt{13}+1}{2}, x = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right]$$

```
(%i12) x^3-x^2+x-1$
```

```
(%i13) solve(%, x);
```

```
(%o13)
```

$$[x = -i, x = i, x = 1]$$

```
(%i14) eq1: x-2*y-z = 1 $
```

```
(%i15) eq2: x-y = 1 $
```

```
(%i16) eq3: 2*x+y-3*z = 4 $
```

```
(%i17) /* Un sistema compatible determinado: */
```

```
solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z]);
```

```
(%o17)
```

$$\left[\left[x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{3} \right] \right]$$

```
(%i18) /* Un sistema compatible indeterminado: */
```

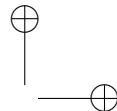
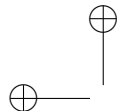
```
eq4: eq1+eq2;
```

```
(%o18)
```

$$-z - 3y + 2x = 2$$

```
(%i19) solve([eq1,eq2,eq4],[x,y,z]);
```

```
Dependent equations eliminated: (3)
```



```
(%o19) 
$$[[x = 1 - \%r1, y = -\%r1, z = \%r1]]$$

```

```
(%i20) /* Un sistema incompatible: */  
solve([eq1,eq2,eq3,x+y+z = 1],[x,y,z]);  
Inconsistent equations: (3)  
- an error. To debug this try debugmode(true);
```

```
(%i21) /* Un sistema no lineal */  
solve([ (x+y)^2=1, x^2=1-x-y],[x,y]);
```

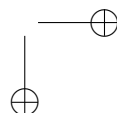
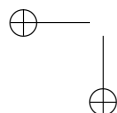
```
(%o21)
```

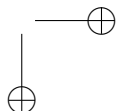
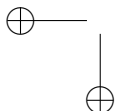
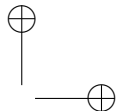
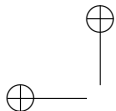
```

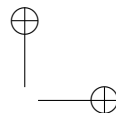
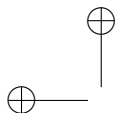
$$\left[ \left[ x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2} - 1 \right], \left[ x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2} - 1 \right], [x = 0, y = 1] \right]$$

```

En las líneas anteriores se muestra cómo se pueden introducir comentarios, de la forma `/* (...texto del comentario...) */`. Además, se puede observar que los parámetros que aparecen en la solución de sistemas compatibles indeterminados se denotan de la forma “%rN”, con $N = 1, 2, \dots$

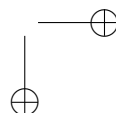
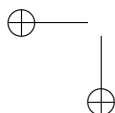


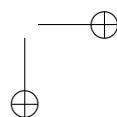
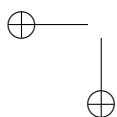
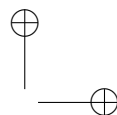
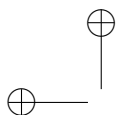


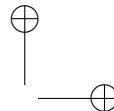
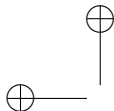


Parte II

Álgebra Matricial







2

Álgebra matricial

Contenidos



1. Creación de matrices y acceso a sus elementos
2. Operaciones con matrices
3. Determinante, rango y otras funciones sobre matrices

2.1 Matrices

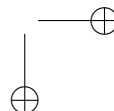
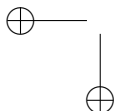
Para introducir matrices en *Maxima*, se utiliza la función `matrix`, a la que pasamos cada una de las filas de la matriz, cuyos elementos escribimos entre corchetes¹

wxMaxima

Para acceder a esta función, *wxMaxima* nos ofrece una interfaz muy atractiva, a la que se puede acceder a través del menú *Algebra* → *Introducir matriz...* *wxMaxima* nos preguntará el número de filas y columnas, así como el formato de la matriz resultante (de tipo general, diagonal, simétrico o antisimétrico) y a continuación nos ofrecerá una ventana en la que podremos introducir sus elementos.



¹En realidad, estamos introduciendo cada la fila como una lista formada por sus elementos (recordemos que en *Maxima* se utilizan los corchetes para definir listas de objetos).



	1	2	3
1	1	0	-2
2	2	3	2
3	-2	0	1

```
(%i1) matrix([1,0,-2], [2,3,2], [-2,0,1]);
```

```
(%o1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si deseamos almacenar la matriz anterior en una variable, por ejemplo A , bastará escribir lo siguiente:

```
(%i2) A:matrix([1,0,-2], [2,3,2], [-2,0,1]);
```

```
(%o2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

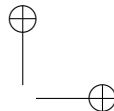
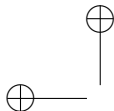
Podemos escribir menos si utilizamos las flechas del teclado para recuperar la entrada anterior y editarla, con el fin de teclear solamente la etiqueta A :. También podemos escribir directamente, en la línea de entrada, la etiqueta A : y a continuación pulsar el menú Algebra $\rightarrow$ Introducir matriz... para escribir el contenido de la matriz A .

Para acceder a los elementos de una matriz, podemos utilizar los corchetes.

```
(%i3) A[2,3];
```

```
(%o3)
```

2



Existe una segunda forma de definir matrices cuyos elementos se ajusten a una regla predefinida. Para ello debemos predefinir esta regla, de forma que defina una “tabla de valores”, que asocie a cada fila y columna (entre corchetes) un número real, como en el siguiente ejemplo:

```
(%i4) T[i,j]:=i+j-1;
```

```
(%o4)
```

$$T_{i,j} := i + j - 1$$

Obsérvese que, en la definición de esta tabla, hemos utilizado el operador $:=$, que también usaremos para definir sucesiones y funciones.

A continuación, podemos usar la función `genmatrix`, a la que se puede acceder a través de `Algebra → Generar matriz...` en *wxMaxima*. Esta función nos pedirá el nombre de la tabla de valores, así como el número de filas y columnas de la matriz resultante, por ejemplo:

```
(%i5) B:genmatrix(T,3,5);
```

```
(%o5)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Utilizando `submatrix` se obtienen submatrices, para lo cual introducimos las filas a eliminar (si existe alguna), a continuación el nombre de la matriz y por último las columnas a eliminar (en su caso). Las funciones `row` y `col` nos permiten acceder, respectivamente, a filas y columnas que deseemos. Se pueden añadir filas y columnas nuevas con `addrow` y `addcol`, todo lo cual muestran los siguientes ejemplos:

```
(%i6) submatrix(1,B,4,5);
```

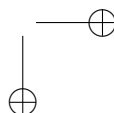
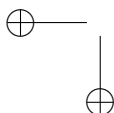
```
(%o6)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) row(B,1);
```

```
(%o7)
```

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$$



(%i8) col(B,5);

(%o8)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(%i9) addcol(B,[10,11,12]);

(%o9)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Puesto que Maxima es un programa de cálculo simbólico, las matrices no se limitan a almacenar valores numéricos, sino que estos pueden venir dados por cualquier tipo de expresión²:

(%i10) C:matrix([x^2, 1+x/y], [sqrt(x), x^2-y=0]);

(%o10)

$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{x}{y} + 1 \\ \sqrt{x} & x^2 - y = 0 \end{pmatrix}$$

(%i11) C,x=2,y=4;

(%o11)

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} & 0 = 0 \end{pmatrix}$$

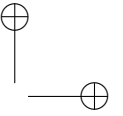
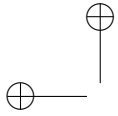
(%i12) solve(C[2,2],x);

(%o12)

$$[x = -\sqrt{y}, x = \sqrt{y}]$$

Las operaciones algebraicas habituales están también disponibles para matrices, aunque debemos tener en cuenta que:

²Esta es uno de los puntos fuertes de programas como *Maxima*, en oposición a otros orientados al cálculo numérico y matricial (como Octave, programa que también tiene licencia libre).



- El operador asterisco (*) se interpreta como producto elemento a elemento.
- El producto matricial viene dado a través del operador punto (.).
- El operador $\wedge$ se utiliza para calcular las potencias de los elementos de una matriz.
- El operador $\wedge\wedge$ se emplea para calcular potencias de matrices.

```
(%i13) A:matrix([a,b,c],[d,e,f]);  
(%o13)
```

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

```
(%i14) B:matrix([u,v,w],[x,y,z]);  
(%o14)
```

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

```
(%i15) A+B;  
(%o15)
```

$$\begin{pmatrix} u+a & v+b & w+c \\ x+d & y+e & z+f \end{pmatrix}$$

```
(%i16) 2*A;  
(%o16)
```

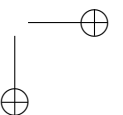
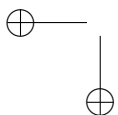
$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix}$$

```
(%i17) A*B;  
(%o17)
```

$$\begin{pmatrix} au & bv & cw \\ dx & ey & fz \end{pmatrix}$$

```
(%i18) C:submatrix(B,3);  
(%o18)
```

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$



(%i19) C.A;

(%o19)

$$\begin{pmatrix} dv + au & ev + bu & fv + cu \\ dy + ax & ey + bx & fy + cx \end{pmatrix}$$

(%i20) A^n;

(%o20)

$$\begin{pmatrix} a^n & b^n & c^n \\ d^n & e^n & f^n \end{pmatrix}$$

(%i21) %,n=1/2;

(%o21)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} & \sqrt{c} \\ \sqrt{d} & \sqrt{e} & \sqrt{f} \end{pmatrix}$$

(%i22) C^^2;

(%o22)

$$\begin{pmatrix} vx + u^2 & vy + uv \\ xy + ux & y^2 + vx \end{pmatrix}$$

Otras funciones aplicables sobre matrices:

- ▶ `diagmatrix` y `zeromatrix`, se pueden utilizar para construir, respectivamente matrices diagonales (con todos sus elementos diagonales iguales entre sí) y matrices nulas.
- ▶ `transpose`, devuelve la matriz traspuesta (disponible en *wxMaxima* a través de `Algebra` → `Trasponer matriz`)
- ▶ `determinant`, calcula el determinante de una matriz cuadrada (`Algebra` → `Determinante`)
- ▶ `rank`, calcula el rango
- ▶ `invert`, devuelve la matriz inversa (menú `Algebra` → `Invertir matriz`)
- ▶ `triangularize`, devuelve una matriz triangular superior resultante de aplicar el método de Gauss a una matriz dada

- `eigenvalues`, devuelve dos listas, la primer formada por los autovalores de una matriz y la segunda por sus multiplicidades (accesible desde *wxMaxima* en Algebra → Valores propios)
- `eigenvectors`, devuelve una lista formada por los autovalores junto a una serie de listas representando a sus autovectores asociados (menú Algebra → Vectores propios de *wxMaxima*)

Algunos ejemplos:

```
(%i23) A:matrix([1,0,-2], [2,3,2], [-2,0,1]);
```

```
(%o23)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i24) determinant(A);
```

```
(%o24)
```

$$-9$$

```
(%i25) B:invert(A);
```

```
(%o25)
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) I:A.B;
```

```
(%o26)
```

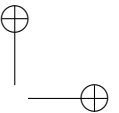
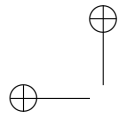
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i27) M:A-x*I;
```

```
(%o27)
```

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 2 & 3-x & 2 \\ -2 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

```
(%i28) solve(determinant(M)=0) /* Autovalores */;
```



```
(%o28)
```

```
 $[x = 3, x = -1]$ 
```

```
(%i29) M, x=3;
```

```
(%o29)
```

```

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i30) rank(%);
```

```
(%o30)
```

```
1
```

```
(%i31) eigenvalues(A) /* [autovalores], [multiplicidades] */;
```

```
(%o31)
```

```
 $[[3, -1], [2, 1]]$ 
```

```
(%i32) eigenvectors(A) /* [autovalores], [v1], [v2], [v3] */;
```

```
(%o32)
```

```
 $[[[3, -1], [2, 1]], [1, 0, -1], [0, 1, 0], [1, -1, 1]]$ 
```

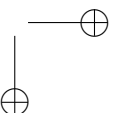
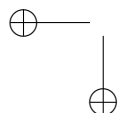
```
(%i33) triangularize(A);
```

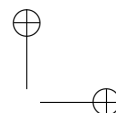
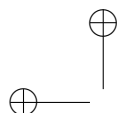
```
(%o33)
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

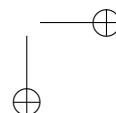
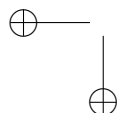
```

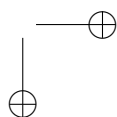
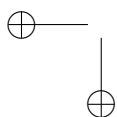
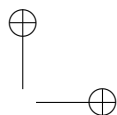
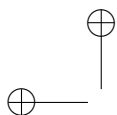


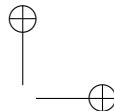
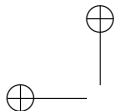


Parte III

Sucesiones y Series numéricas







Sucesiones y series numéricas

3.1 Sucesiones

En *Maxima*, las sucesiones se definen a través de su término general o bien mediante una expresión de recurrencia. En cualquier caso, se utilizará el operador `:=`, introduciendo la variable índice entre corchetes (`[]`). En las definiciones por recurrencia deberemos, además, utilizar el operador `:` para asignar valores a los primeros elementos.

```
(%i1) a[n]:=1/(2*n-1);
```

```
(%o1)
```

$$a_n := \frac{1}{2n-1}$$

```
(%i2) a[1];
```

```
(%o2)
```

1

```
(%i3) makelist(a[k],k,1,10);
```

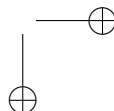
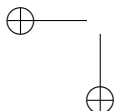
```
(%o3)
```

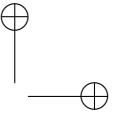
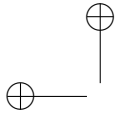
$$\left[1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}\right]$$

```
(%i4) b[1]:1;
```

```
(%o4)
```

1





```
(%i5) b[n]:=2*b[n-1];
```

```
(%o5)
```

$$b_n := 2 b_{n-1}$$

```
(%i6) makelist(b[k],k,1,10);
```

```
(%o6)
```

[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]

Recordemos que, en *wxMaxima*, la función `makelist` es accesible a través del menú **Algebra** → **Construir lista...**

Un ejemplo más interesante: definición de la conocida sucesión de Fibonacci, primero mediante recurrencia y después mediante su término general¹

```
(%i7) fib1[1]:1;
```

```
(%o7)
```

1

```
(%i8) fib1[2]:1;
```

```
(%o8)
```

1

```
(%i9) fib1[n]:=fib1[n-1]+fib1[n-2];
```

```
(%o9)
```

$$\text{fib1}_n := \text{fib1}_{n-1} + \text{fib1}_{n-2}$$

```
(%i10) l1:makelist(fib1[n],n,1,10);
```

```
(%o10)
```

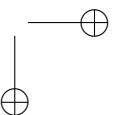
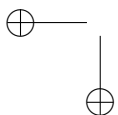
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]

```
(%i11) phi:(1+sqrt(5))/2 /* RAZON AUREA */;
```

```
(%o11)
```

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

¹Aunque esta sucesión está predefinida en *Maxima* mediante la función `fib(n)`



(%i12) fib2[n] := (phi^n - (1-phi)^n) / sqrt(5);

(%o12)

$$\text{fib2}_n := \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

(%i13) l2: makelist(fib2[n], n, 1, 10);

(%i14) ratsimp(%);

(%o14)

[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]

Para Calcular límites usamos la función `limit`, que está disponible en el menú **Análisis** → **Calcular límite...** de *wxMaxima*. Como parámetros de esta función, tenemos que teclear la expresión de una sucesión, el nombre de la variable respecto de la cual deseamos calcular el límite y el valor hacia el que ésta tiende. En *Maxima* existen dos variables especiales, `inf` y `minf`, que representan respectivamente a $+\infty$ y $-\infty$. En *wxMaxima*, podemos acceder a todo ello a través del menú **Análisis** → **Calcular límite...** o directamente en el botón [Límite...]

(%i15) a[n] := (n - sqrt(n^2 - 4)) / (n + 1);

(%o15)

$$a_n := \frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{n + 1}$$

(%i16) limit(a[n], n, inf);

(%o16)

0

(%i17) limit(n/sqrt(n), n, inf);

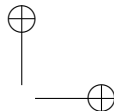
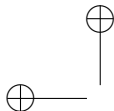
(%o17)

∞

(%i18) limit(1/(sqrt(n) - sqrt(n+1)), n, inf);

(%o18)

$-\infty$



```
(%i19) limit((n-2)/(n-3))^(2*n),n,inf);
```

```
(%o19) 
$$e^2$$

```

```
(%i20) limit((-1)^n,n,inf);
```

```
(%o20) ind
```

```
(%i21) limit(n*(-1)^n,n,inf);
```

```
(%o21) und
```

Como se puede observar, ante el cálculo del límite de $(-1)^n$, *Maxima* devuelve la palabra clave `ind`, que se puede interpretar como indefinido pero acotado, mientras que ante el límite $n(-1)^n$ responde `und` (de *undefined*) para indicar que el límite es indefinido y no necesariamente acotado.

En algunas ocasiones, *Maxima* no tendrá suficiente información para realizar el cálculo requerido y nos solicitará información adicional, que tendremos que `teclear`:

```
(%i22) limit(a*n^2,n,inf);
```

```
Is a positive, negative, or zero?
```

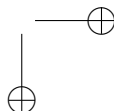
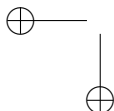
```
negative;
```

```
(%o22) 
$$-\infty$$

```

3.2 Series numéricas

Maxima nos permite definir sumas, de finitos o infinitos sumandos, mediante la función `sum` (en *wxMaxima*, menú `Análisis` → `Calcular suma...` o botón `[Suma...]`). Si deseamos calcular el resultado (en terminología de *Maxima*, simplificar la suma) deberemos activar la variable `simpsum`, bien sea escribiendo `simpsum:true`, o



bien añadiendo una coma seguida de la expresión `simpsum`. Esta última es la opción activada por defecto si utilizamos el menú **Análisis** → **Calcular suma...**

```
(%i1) sum(k^2,k,1,100);
(%o1)
338350

(%i2) sum(k^2,k,1,n);
(%o2)

$$\sum_{k=1}^n k^2$$


(%i3) sum(k^2,k,1,n),simpsum;
(%o3)

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$


(%i4) sum(k^2,k,1,inf);
(%o4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2$$


(%i5) sum(k^2,k,1,inf),simpsum;
(%o5)

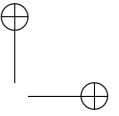
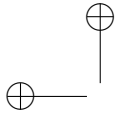
$$\infty$$

```

Puesto que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^2 \neq 0$, es lógico que la suma anterior sea infinita². Sin embargo, el hecho de que una sucesión converja a cero no siempre nos garantiza que su suma sea finita, como vemos al sumar las sucesiones $a_k = 1/k$ (serie armónica) y $b_k = 1/2^k$ (serie geométrica de razón $1/2$).

```
(%i6) a[k]:=1/k$
```

²Ya sabemos que para que una serie sea convergente (es decir, para que la suma de infinitos números reales tenga un valor finito), es necesario que la sucesión sumada tienda a cero.



```
(%i7) b[k]:=1/2^k$
(%i8) sum(a[k],k,1,inf);
(%o8)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

```
(%i9) %,simpsum;
(%o9)
```

∞

```
(%i10) sum(b[k],k,1,inf);
(%o10)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

```
(%i11) %,simpsum;
(%o11)
```

1



Ejercicios

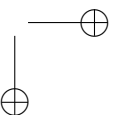
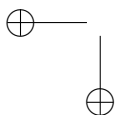
1. Comprueba la siguiente identidad para $n = 100$:

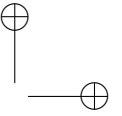
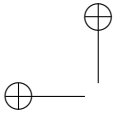
$$1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

2. Aunque suma de la serie armónica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ es infinita, diverge muy lentamente³.

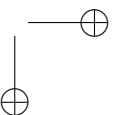
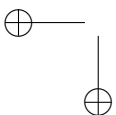
¿Es la suma de sus 10,000 primeros términos mayor que 10?

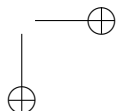
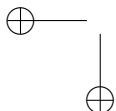
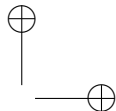
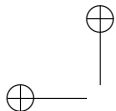
³Por ejemplo, la suma de los primeros 10^4 términos de la serie suman menos de 100 ([http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_arm%C3%B3nica_\(matem%C3%A1tica\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_arm%C3%B3nica_(matem%C3%A1tica)))

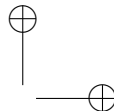
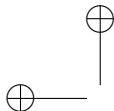




3. En 1735, Euler escribió con gran alegría: “Contra todo pronóstico, he encontrado una expresión elegante para la suma de la serie $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \text{etc.}$ ”. Efectivamente, el resultado era fascinante: una suma de números racionales, en cuyo cálculo habían fracasado los mejores matemáticos del siglo XVII, dependía de la cuadratura del círculo. En concreto, el resultado era $\frac{\pi^2}{6}$.
- Utiliza Maxima para calcular la suma de los 50 primeros términos.
 - Calcula la diferencia entre el resultado obtenido y la fracción de π^2 hallada por Euler.

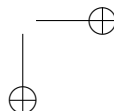
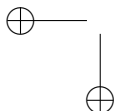


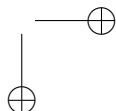
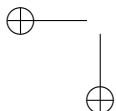
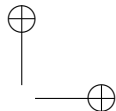
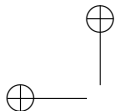


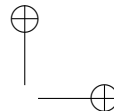
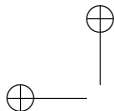


Parte IV

Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable







4

Estudio de una función real de variable real

Contenidos



1. Dominio de una función.
2. Cálculo de puntos de corte con los ejes y estudio de asíntotas.
3. Continuidad y derivabilidad.
4. Monotonía, extremos relativos y puntos de inflexión.
5. Representación gráfica de una función.

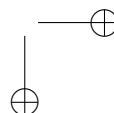
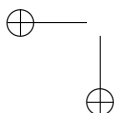
En esta práctica estudiaremos, para las funciones reales de variable real, el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, la continuidad, la derivabilidad y la representación gráfica de dicha función. Para ampliar conocimientos véase ?.

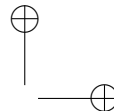
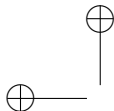
4.1 Estudio de una función

Veamos con un ejemplo el estudio completo de una función real de variable real. Para ello, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Estudiar su dominio, puntos de corte y asíntotas.





2. Analizar su continuidad y su derivabilidad, calcular su función derivada primera.
3. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos relativos.
4. Representar su gráfica.

Resolución:

1. Dominio, puntos de corte y asíntotas

Definimos:

```
( %i1)  g(x) := 1 / (1+x^2) ;
```

```
( %o1)
```

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

```
( %i2)  h(x) := 1+log(x) ;
```

```
( %o2)
```

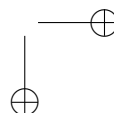
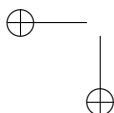
$$h(x) := 1 + \log x$$

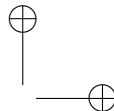
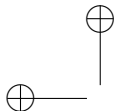
El dominio de g es todo $\mathbb{R}$, pues $1+x^2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Pero si hubiera alguna duda, se podría utilizar *Maxima*, para comprobar que $1+x^2$ no tiene ninguna raíz real (todas sus raíces son números imaginarios puros):

```
( %i3)  solve(1+x^2=0) ;
```

```
( %o3)
```

$$[x = -i, x = i]$$





Maxima es, incluso, suficientemente astuto para asegurarnos que $1 + x^2$ es siempre estrictamente positivo, utilizando el comando `is`, que intenta comprobar si una expresión es cierta:

```
(%i4) is(1+x^2=0);  
(%o4)  
  
false
```

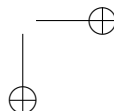
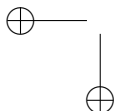
```
(%i5) is(1+x^2>0);  
(%o5)  
  
true
```

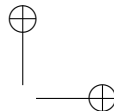
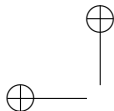
Por otra parte, la función $h(x)$ solamente está bien definida para aquellos valores de x para los que tiene sentido $\log(x)$, es decir, el dominio de h es $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

En definitiva, *el dominio de la función $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$* , pues cuando $x \leq 1$ es igual a $g(x)$, que está perfectamente definida, y cuando $x > 1$ coincide con $h(x)$, que no tiene ningún problema para estos valores de x .

Para estudiar los puntos de corte con el eje de las abscisas, planteamos las siguientes ecuaciones:

```
(%i6) solve(g(x)=0,x);  
(%o6)  
  
[]  
  
(%i7) solve(h(x)=0,x);  
(%o7)  
  
[x = e^-1]
```





Para la ecuación $g(x) = 0$ no existen soluciones lo que significa que no hay puntos de corte con el eje x para $x \leq 1$. En el caso de la ecuación $h(x) = 0$, obtenemos la solución $x = e^{-1}$, pero este valor está fuera del intervalo de definición (donde se aplica $h(x)$ en la función $f(x)$), con lo que concluimos que no existe ningún punto de corte de la gráfica de la función $f(x)$ con el eje x .

En cuanto a posibles puntos de corte con el eje vertical, cuando $x = 0$ nuestra función toma el valor $f(0) = g(0) = 1$:

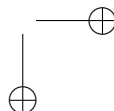
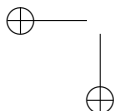
```
(%i8) g(0);  
(%o8)  
1
```

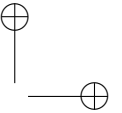
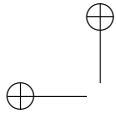
En definitiva, el único punto de corte de $f(x)$ con los ejes es el $(0, 1)$.

Para estudiar las asíntotas verticales, tendríamos que analizar si existe algún punto $a \in \mathbb{R}$ en el que el límite de $f(x)$ por la derecha o por la izquierda sea $+\infty$ ó $-\infty$, lo que ocurre típicamente en funciones racionales en las que se anula el denominador, en funciones logarítmicas, etc... En nuestro caso, la función $g(x)$ no tiene ninguna asíntota vertical, porque su denominador es siempre distinto de cero. La función $h(x)$ tendría una asíntota vertical en $x = 0$, debido al logaritmo y teniendo en cuenta el dominio del logaritmo, sólo tiene sentido calcular el límite cuando x tiende a cero por la derecha:

```
(%i9) limit(h(x), x, 0, plus);  
(%o9)  
-∞
```

Pero esto no afecta a $f(x)$, ya que en los alrededores de $x = 0$ no toma los valores de $h(x)$, sino de $g(x)$, con lo que $f(x)$ no tiene ninguna asíntota vertical.





Con respecto a asíntotas horizontales, tendremos que estudiar límites de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ (en cuyo caso $f(x) = g(x)$) y cuando $x \rightarrow +\infty$ (en cuyo caso $f(x) = h(x)$),

```
(%i10)  limit(g(x),x,minf);  
(%o10)  
0
```

```
(%i11)  limit(h(x),x,inf);  
(%o11)  
 $\infty$ 
```

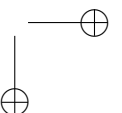
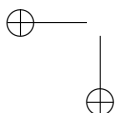
Por lo tanto, podemos concluir que $f(x)$ *no tiene ninguna asíntota vertical y sí tiene una asíntota horizontal (la recta $y = 0$) cuando $x \rightarrow -\infty$.*

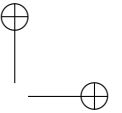
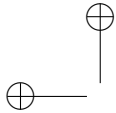
2. Continuidad y derivabilidad

Las funciones $g(x)$ y $h(x)$ son continuas dentro de sus respectivos dominios, por lo tanto f es continua salvo, eventualmente, en $x = 1$, el punto que divide las regiones donde $f(x)$ toma los valores de $g(x)$ y de $h(x)$. Pero los límites laterales de $f(x)$ en este punto son distintos, pues:

```
(%i12)  limit(g(x),x,1,minus);  
(%o12)  
 $\frac{1}{2}$   
  
(%i13)  limit(h(x),x,1,plus);  
(%o13)  
1
```

en consecuencia, $f(x)$ no es continua en $x = 1$ (tendrá una discontinuidad de salto finito).





Además, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$ (por no ser continua) pero sí en el resto de $\mathbb{R}$ (pues tanto $g(x)$ como $h(x)$ lo son para valores de x que estén dentro de sus respectivos dominios). Puesto que

```
(%i14) diff(g(x), x);
```

```
(%o14)
```

$$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

```
(%i15) diff(h(x), x);
```

```
(%o15)
```

$$\frac{1}{x}$$

la función derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Monotonía y extremos relativos

El crecimiento de $f(x)$ depende del signo de la función derivada, $f'(x)$.

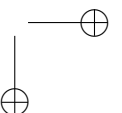
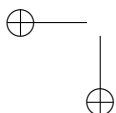
Cuando $x > 1$, obviamente, $\frac{1}{x} > 0$ y por lo tanto, $f'(x) > 0$. Aunque es un caso tan sencillo que no merece la pena recurrir al ordenador, puede servir como ilustración la forma en que se podría comprobar lo anterior, utilizando los comandos `assume` e `is`:

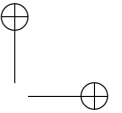
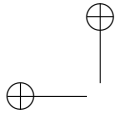
```
(%i16) assume(x>1);
```

```
(%o16)
```

$$[x > 1]$$

```
(%i17) is(1/x>0);
```





```
(%o17)
```

```
true
```

cuando $x < 1$, el asunto es diferente, pues el signo de $f'(x)$ dependerá de la expresión:

$$-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad (4.1)$$

que depende del signo de $-2x$ (puesto que el denominador es siempre estrictamente positivo), siendo, negativo cuando $x > 0$ y positivo en caso contrario.

Por lo tanto $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)$.

Aunque en casos tan sencillos como este no merezca la pena, el signo de la expresión (4.1) se podría haber estudiado utilizando el ordenador. Aunque ante una pregunta inicial¹, *Maxima* se muestra incapaz de ofrecer una respuesta:

```
(%i18) forget(x>1)$
```

```
(%i19) assume(x<1)$
```

```
(%i20) expresion:diff(g(x),x);
```

```
(%o20)
```

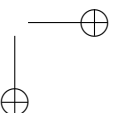
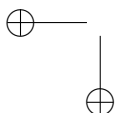
$$-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

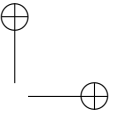
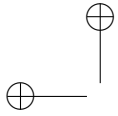
```
(%i21) is(expresion>0);
```

```
(%o21)
```

```
unknown
```

¹ Como se ve, es necesario utilizar el comando `forget`, que elimina la restricción que fue impuesta anteriormente por `assume`. Se puede usar también la función `facts()` para obtener un listado de las proposiciones que están siendo asumidas.





Evidentemente, lo que está ocurriendo es que el signo de la expresión anterior depende de $-2x$, es decir, de si $x > 0$ ó $x < 0$. Lo podemos comprobar:

```
(%i22) forget(x<1)$  
(%i23) assume(0<x,x<1)$  
(%i24) is(expresion<0);  
(%o24)  
  
true
```

```
(%i25) forget(0<x,x<1)$  
(%i26) assume(x<0)$  
(%i27) is(expresion>0);  
(%o27)  
  
true
```

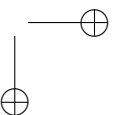
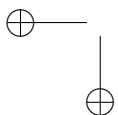
```
(%i28) forget(x<0)$
```

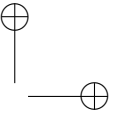
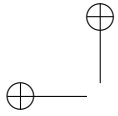
Para hallar máximos y mínimos relativos, calculemos los puntos críticos de f :

```
(%i29) solve(diff(g(x),x)=0,x);  
(%o29)  
  
[x = 0]
```

```
(%i30) solve(diff(h(x),x)=0,x);  
(%o30)  
  
[]
```

Esto es, h no tiene puntos críticos y g tiene un punto crítico, $x = 0$. Cuando $x = 0$ la función f es igual a g , luego éste es un punto crítico de f . Para saber si





se trata de un máximo o un mínimo, podemos estudiar el signo de la derivada segunda:

```
(%i31) diff(g(x), x, 2);
```

```
(%o31)
```

$$\frac{8x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

```
(%i32) %, x=0;
```

```
(%o32)
```

$$-2$$

Por lo tanto, $f''(0) = g''(0) = -2 < 0$, es decir, f tiene un máximo relativo en $x = 0$.

4. Representación gráfica

Para representar la gráfica de f , podemos definir:

```
(%i33) f(x) := if(x<=1) then g(x) else h(x);
```

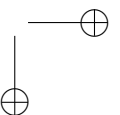
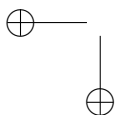
```
(%o33)
```

$$f(x) := \text{if } x \leq 1 \text{ then } g(x) \text{ else } h(x)$$

El problema es que *Maxima* no está preparado para representar directamente este tipo de funciones, siendo necesario encapsular $f(x)$ en una expresión de la forma “ $(f(x))$ ”.

```
(%i34) plot2d(f(x), [x, -5, 5]);
```

```
(%o34)
```



```
(%i35) plot2d('f(x)', [x, -5, 5], [gnuplot_preamble, "set
zeroaxis"]);
(%o35)
```

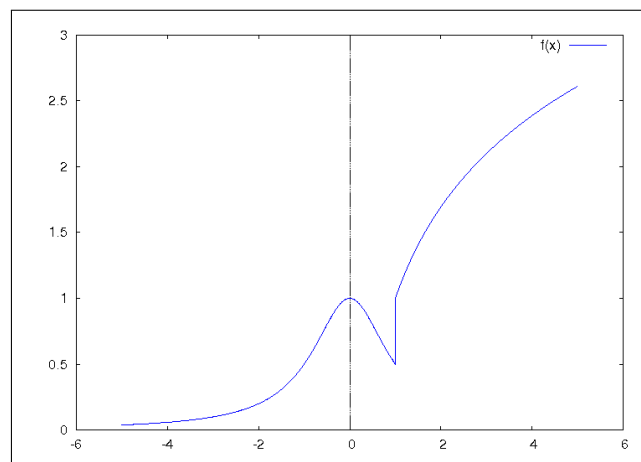


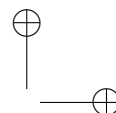
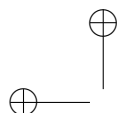
Figura 4.1: Gráfica de $f(x)$

La fórmula empleada para la representación gráfica de $f(x)$ (ver figura 4.1) tiene un problema: erróneamente, se representa una línea vertical en $x = 1$ que oculta la existencia de una discontinuidad de salto en este punto.



Ejercicios

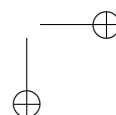
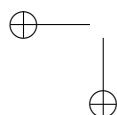
1. Estudiar la monotonía y extremos de la curva $y = x^4 e^{-x^2}$.
2. Estudiar las asíntotas de la curva $y = \frac{x^2 + 3\sqrt{x^3 + 1}}{2(x + 1)}$.
3. Estudiar la monotonía, asíntotas, extremos, concavidad, puntos de inflexión y representación gráfica de las siguientes funciones:

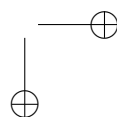
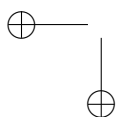
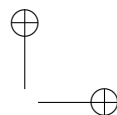
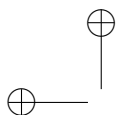


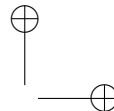
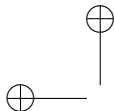
a) $\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$

b) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

c) $y = \arctag(x)$







5

Polinomio de Taylor

Contenidos



1. Definición de Polinomio de Taylor.
2. Aproximación local a una función.
3. Error relativo y error absoluto.

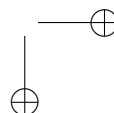
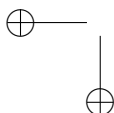
En esta práctica definimos el polinomio de Taylor de una función entorno a un punto y motivamos su interés como herramienta para aproximar funciones. Finalmente, para estudiar la bondad de dicha aproximación, calcularemos los errores absoluto y relativo de distintas aproximaciones obtenidas.

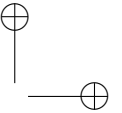
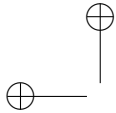
5.1 Polinomio de Taylor

Sea una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Si se conocen los valores $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^n(x_0)$ se define el polinomio de Taylor de orden n como:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Este polinomio aproxima a la función $f(x)$ en un entorno del punto x_0 .





En *Maxima* la orden $taylor(f(x), x, x_0, n)$ muestra el desarrollo en series de Taylor hasta el término n -ésimo de la función $f(x)$ alrededor de x_0 pero no permite tratar su resultado como una expresión en x .

```
(%i1) f(x):=sqrt(x+1);  
(%o1)
```

$$f(x) := \sqrt{x+1}$$

```
(%i2) "desarrollo de Taylor de f(x) de orden n=2 alrededor  
de x=0"$
```

```
(%i3) taylor(f(x), x, 0, 2);  
(%o3)
```

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

Para calcular el polinomio de Taylor como expresión se utiliza la función `subst()`, a continuación se calculan los polinomios de Taylor de orden 2, 3 y 4 así como sus respectivas gráficas para observar como se aproximan dichos polinomios a $f(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

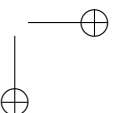
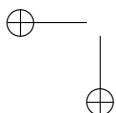
```
(%i4) p2(x):=subst(t=x,taylor(f(t),t,0,2))$  
(%i5) p3(x):=subst(t=x,taylor(f(t),t,0,3))$  
(%i6) p4(x):=subst(t=x,taylor(f(t),t,0,4))$  
(%i7) p2(x);  
(%o7)
```

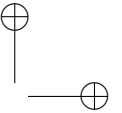
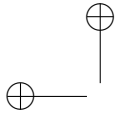
$$-\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

```
(%i8) p3(x);  
(%o8)
```

$$\frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

```
(%i9) p4(x);
```





```
(%o9)
```

$$-\frac{5x^4}{128} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

```
(%i9) plot2d([f(x),p1(x),p2(x),p3(x),p4(x)], [x,-2,6],[y,-1,3]);
```

Antes de representar graficamente los polinomios de Taylor, se desea comprobar que efectivamente los polinomios evaluados “cerca” del valor $x_0 = 0$ producen valores cercanos a los de la función $f(x)$.

```
(%i11) "Elegimos un valor cercano a x0=0, por ejemplo x1=0.3"$
```

```
(%i12) x1:0.3$
```

```
(%i13) "Valor exacto de f(x1)"$
```

```
(%i14) f(x1);
```

```
(%o14)
```

1,1401754250991381

```
(%i15) "Sucesivas aproximaciones por los polinomios de Taylor"$
```

```
(%i16) p2(x1);
```

```
(%o16)
```

1,1387499999999999

```
(%i17) p3(x1);
```

```
(%o17)
```

1,1404375

```
(%i18) p4(x1);
```

```
(%o18)
```

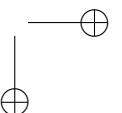
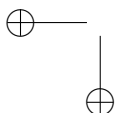
1,1401210937499999

```
(%i19) "Errores absolutos de cada aproximación"$
```

```
(%i20) abs(f(x1)-p2(x1));
```

```
(%o20)
```

0,0014254250991381223



```
(%i21)  abs(f(x1)-p3(x1));
(%o21)
2,6207490086194163  $\times 10^{-4}$ 
```

```
(%i22)  abs(f(x1)-p4(x1));
(%o22)
5,4331349138125873  $\times 10^{-5}$ 
```

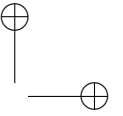
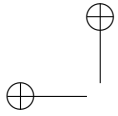
Observemos que si se pretende aproximar valores algo más alejados del valor donde se está realizando el desarrollo, los polinomios de Taylor no funcionan tan bien.

```
(%i23)  "Se desea aproximar la imagen por f(x) de x2=1.5"$
(%i24)  x2:1.5$
(%i25)  "Valor exacto de f(x2)"$
(%i26)  f(x2);
(%o26)
1,5811388300841898
```

```
(%i27)  "Sucesivas aproximaciones por los polinomios de Taylor"$
(%i28)  p2(x2);
(%o28)
1,46875
```

```
(%i29)  p3(x2);
(%o29)
1,6796875
```

```
(%i30)  p4(x2);
(%o30)
1,48193359375
```



```
(%i31) "Errores absolutos de cada aproximación"$  
(%i32) abs(f(x2)-p2(x2));  
(%o32)
```

0,11238883008418976

```
(%i33) abs(f(x2)-p3(x2));  
(%o33)
```

0,098548669915810239

```
(%i34) abs(f(x2)-p4(x2));  
(%o34)
```

0,099205236334189761

Se puede comparar los errores de ambas aproximaciones utilizando el error relativo $E_r = \left| \frac{p-p^*}{p} \right|$. Por ejemplo, veamos que la aproximación del polinomio $p_4(x)$ es mejor para $x_1 = 0,3$ que para $x_2 = 1,5$.

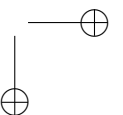
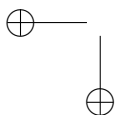
```
(%i37) abs((f(x1)-p4(x1))/f(x1));  
(%o37)
```

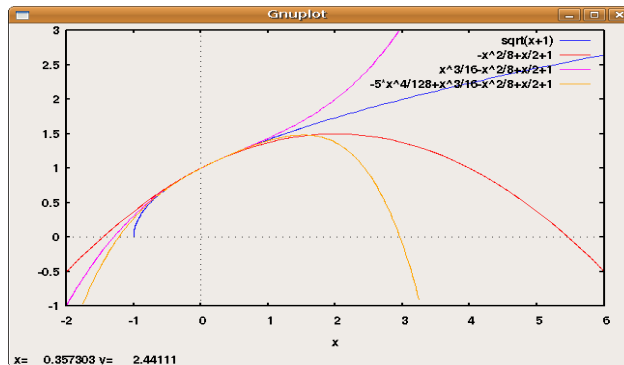
$4,7651745461363342 \times 10^{-5}$

```
(%i38) abs((f(x2)-p4(x2))/f(x2));  
(%o38)
```

0,062742900526266535

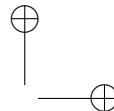
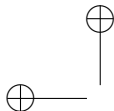
Por último, se comprueba cómo aproxima cada polinomio mediante la gráfica conjunta de $f(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ y $p_4(x)$.





Ejercicios

1. Se desea aproximar el número $x_1 = \sqrt{2}$. Para ello, se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \frac{3}{2}}$. Encuentra el polinomio de Taylor que desarrollado en un entorno de $x_0 = 0$ aproxima a x_1 con un error absoluto menor que $E = 7 \times 10^{-5}$.
Nota: Se considera como valor "exacto" de $\sqrt{2} = 1,414213562373095$.
2. Dada la función $g(x) = \ln(x + 1)$, calcula los polinomios de Taylor de orden 2, 3 y 4 alrededor de $x_0 = 0$ y representa las correspondientes gráficas para estudiar su comportamiento.
3. Sea la función $p(x) = 1 + x + x^2$. ¿Cuál es su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x_0 = 0$? ¿y de $x_0 = 10$? ¿Será cierto para cualquier polinomio de grado n ?



6

Cálculo de primitivas, integral definida y aplicaciones

Contenidos

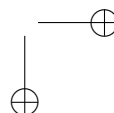
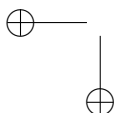


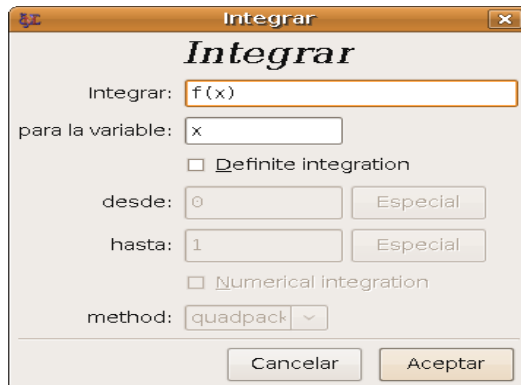
1. Primitiva de una función.
2. Integral definida. Área bajo la curva.
3. Longitud de un arco de curva.
4. Área de una superficie de revolución y volumen de un sólido de revolución.

En esta práctica se repasan los conceptos de primitiva de una función y de integral definida, así como sus aplicaciones geométricas. Para saber más sobre estos conceptos véase ?.

6.1 Cálculo de primitivas

En *wxMaxima* es posible calcular integrales de funciones mediante la orden `integrate(f(x), x)` o mediante el botón [Integrar...] e introduciendo en la ventana de diálogo la correspondiente función.





```
(%i1) f(x):=3*x^2-x/3+1;
```

```
(%o1)
```

$$f(x) := 3x^2 - \frac{x}{3} + 1$$

```
(%i2) integrate(f(x),x);
```

```
(%o2)
```

$$x^3 - \frac{x^2}{6} + x$$

De la misma forma que ocurre con la orden `taylor()`, la orden `integrate()` no genera una expresión en x que nos permita realizar cálculos. De nuevo se utiliza la orden `subst()`:

```
(%i3) F(x):=subst(t=x,integrate(f(t),t))$
```

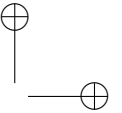
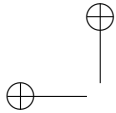
```
(%i4) F(x);
```

```
(%o4)
```

$$x^3 - \frac{x^2}{6} + x$$

El conjunto formado por todas las primitivas de la función $f(x)$ viene dado por:

```
(%i5) F(x):=subst(t=x,integrate(f(t),t))+C$
```



```
(%i6)  F(x);  
(%o6)
```

$$C + x^3 - \frac{x^2}{6} + x$$

Podemos comprobar que $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ derivando respecto de x :

```
(%i7)  diff(F(x), x);  
(%o7)
```

$$3x^2 - \frac{x}{3} + 1$$

Si definimos la función $g(x) = \sin(x)^2$ la integral de la función $h(x) := a * f(x) + b * g(x)$ es la siguiente:

```
(%i8)  g(x):=sin(x)^2$  
(%i9)  h(x):=a*f(x)+b*g(x);  
(%o9)
```

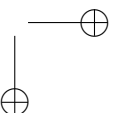
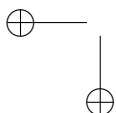
$$h(x) := a f(x) + b g(x)$$

```
(%i10)  integrate(h(x), x);  
(%o10)
```

$$\frac{b \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right)}{2} + a \left(x^3 - \frac{x^2}{6} + x \right)$$

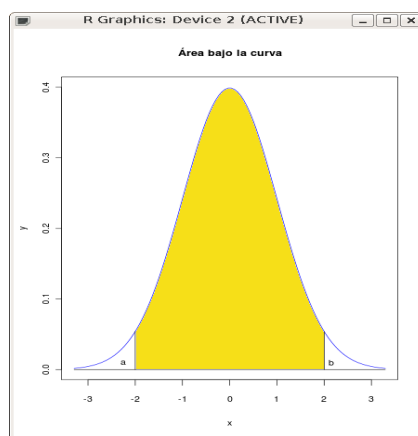
```
(%i11)  ratsimp(%);  
(%o11)
```

$$-\frac{3b \sin(2x) - 12ax^3 + 2ax^2 + (-6b - 12a)x}{12}$$



6.2 Integral definida

Dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define la gráfica de dicha función en el intervalo $[a, b]$ como el conjunto $gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } y = f(x)\}$.



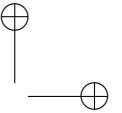
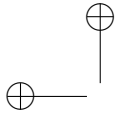
Se define el área del recinto formado por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la gráfica de $f(x)$ como la integral definida de la función en valor absoluto entre los extremos a y b .

$$\text{Área(recinto)} = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ejemplo: Calcular el área bajo la curva $f(x) = e^x \cos(x)$ entre $a = 0$ y $b = \pi$.

En primer lugar se asegura que la función no cambia de signo en el intervalo indicado, pues si así fuese se debe definir $|f(x)|$ como una función a trozos en intervalos y por lo tanto la integral en dicho intervalo se divide en suma de integrales. Por ejemplo si $f(x) \geq 0$ en $[a, c]$ y $f(x) \leq 0$ en $[c, b]$ entonces:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leq x \leq c \\ -f(x) & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$



y por lo tanto

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

```
(%i12) kill(f,g,h);  
(%o12)
```

done

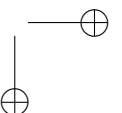
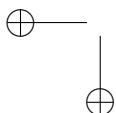
```
(%i13) f(x):=%e^x*cos(x)$  
(%i14) solve(f(x)=0,x);  
‘solve’ is using arc-trig functions to get a solution.  
Some solutions will be lost.  
(%o14)
```

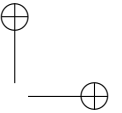
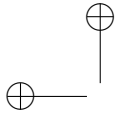
$$\left[x = \frac{\pi}{2}, e^x = 0 \right]$$

El mensaje de warning indica que para resolver la ecuación se han utilizados inversas de funciones trigonométricas que unicamente están definidas en ciertos intervalos y al ser funciones periódicas existen soluciones que no se están mostrando. En el intervalo $[0, \pi]$ la función $\cos(x)$ se anula una única vez, $x = \frac{\pi}{2}$ y la función exponencial no se anula nunca.

El siguiente paso es ver qué signo tiene la función $f(x)$ en cada intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Para lo cual se elige un punto del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y se calcula su imagen por la función $f(x)$, el signo de este valor es el signo de la función para todo ese intervalo. Se repetirá el mismo procedimiento para el segundo intervalo.

```
(%i15) f(1),numer;  
(%o15)  
1,4686939399158851
```





```
(%i16) f(2),numer;  
(%o16)
```

$-3,0749323206393591$

Esto significa que $f(x) > 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(x) < 0$ en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Por lo que el área que se desea calcular viene expresada por el cálculo de las siguientes integrales:

$$\text{Área(recinto)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx$$

```
(%i17) integrate(f(x),x,0,%pi/2)-integrate(f(x),x,%pi/2,%pi);  
(%o17)
```

$$\frac{e^{\pi}}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

```
(%i18) %,numer;  
(%o18)
```

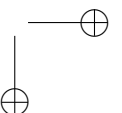
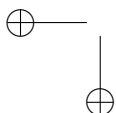
$15,880823697354984$

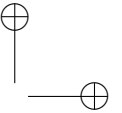
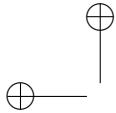
En *wxMaxima* se puede calcular la integral definida usando el botón [Integrar...] modificando en la ventana de diálogo los límites de integración.

La integral definida también se utiliza para calcular el área acotada por las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Supóngase que $f(x) \leq g(x)$

$$\text{Área(recinto)} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Ejemplo: Calcular el área comprendida entre las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.





Calculamos en primer lugar los puntos de cortes (si es que los tiene) de $f(x)$ con $g(x)$.

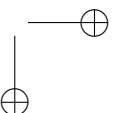
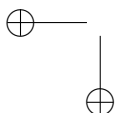
```
(%i19) kill(f,g);  
(%o19)  
  
done  
  
(%i20) f(x):=3*x^3-x^2-10*x$  
(%i21) g(x):=-x^2+2*x$  
(%i22) solve(f(x)=g(x),x);  
(%o22)  
[x = -2, x = 2, x = 0]
```

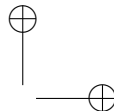
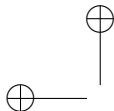
Se estudia qué gráfica está por encima de la otra en los intervalos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$.

```
(%i23) assume(-2<x, x<0);  
(%o23)  
[x > -2, x < 0]  
  
(%i24) is(f(x)<g(x));  
(%o24)  
false  
  
(%i25) forget(-2<x, x<0);  
(%o25)  
[x > -2, x < 0]
```

Lo que implica que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(-2, 0)$.

```
(%i26) assume(0<x, x<2);
```





```
( %o26)
```

$$[x > 0, x < 2]$$

```
( %i27)  is (f (x) < g (x) ) ;  
( %o27)
```

$$\text{true}$$

```
( %i28)  forget (0 < x, x < 2) ;  
( %o28)
```

$$[x > 0, x < 2]$$

Que implica que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(0, 2)$. Por lo tanto el área del recinto encerrado por las dos gráficas viene dado por:

```
( %i29)  integrate (f (x) - g (x) , x, -2, 0) + integrate (g (x) - f (x) , x, 0, 2) ;  
( %o29)
```

$$24$$

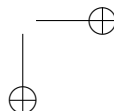
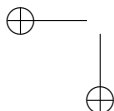
En la siguiente gráfica se puede comprobar el estudio realizado:

```
( %i30)  plot2d ([f (x) , g (x) ] , [x, -3, 3]) ;  
( %o30)
```

6.3 Aplicaciones de la integral definida

1. Longitud de una curva en un intervalo.

Dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, la longitud de la curva entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ viene dada por la siguiente integral:



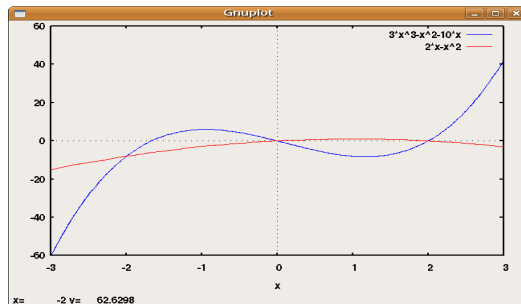
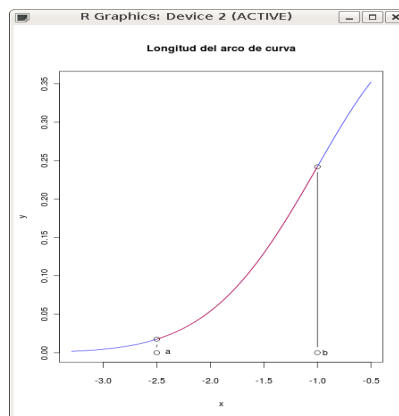


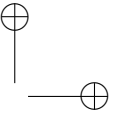
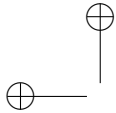
Figura 6.1: Gráfica de $f(x)$ y $g(x)$

$$L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



Ejemplo: Calcular la longitud de la curva e^x desde $a = 0$ hasta $b = 10$.

En *wxMaxima* definimos la función correspondiente y calculamos su integral definida mediante el botón [Integrar...].



```
(%i31) kill(f,g);
```

```
(%o31)
```

done

```
(%i32) f(x):=%e^x;
```

```
(%o32)
```

$$f(x) := e^x$$

```
(%i33) g(x):=subst(t=x,diff(f(x),x))$
```

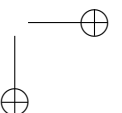
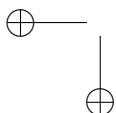
```
(%i34) integrate(sqrt(1+g(x)^2),x,0,10),numer;
```

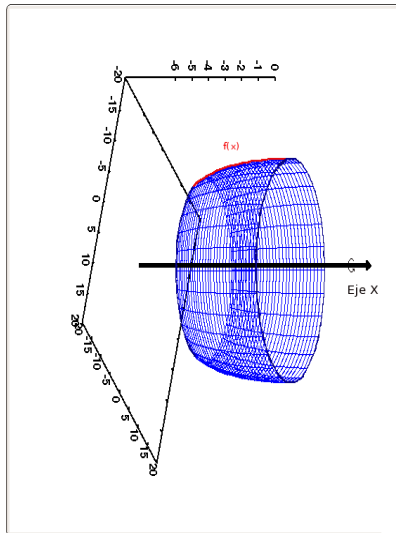
```
(%o34)
```

22025,932932131396

2. Área de una superficie de revolución.

Se considera en este apartado las superficies que se generan al girar alrededor del *eje* OX o alrededor del *eje* OY la gráfica de una función regular (al menos de clase $\mathcal{C}^1$ en un intervalo).





Dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, el área de la superficie de revolución entre los puntos a y b que se genera al girar la gráfica de la función alrededor del *eje* OX viene dada por la siguiente integral:

$$A_{ab} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Del mismo modo, se define el área alrededor del *eje* OY como sigue:

$$A_{ab} = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Ejemplo: Calcular el área de revolución del sólido que se genera al girar la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ alrededor del *eje* OX entre los puntos $a = -1$ hasta $b = 1$.

```
(%i35) kill(f,g);
```

(%o35)

done

(%i36) $f(x) := \sqrt{1-x^2};$

(%o36)

$$f(x) := \sqrt{1-x^2}$$

(%i37) $g(x) := \text{subst}(t=x, \text{diff}(f(x), x)) \$$

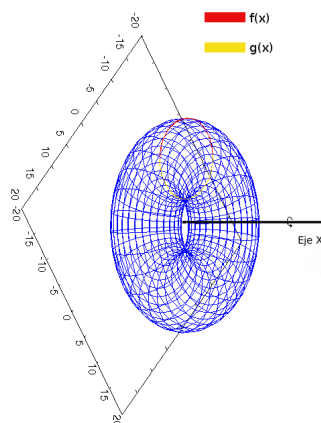
(%i38) $2*\pi*\text{integrate}(f(x)*\sqrt{1+g(x)^2}, x, -1, 1);$

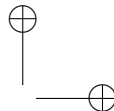
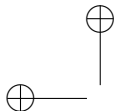
(%o38)

$$4\pi$$

Observación: El área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

3. Volumen de un sólido de revolución.





Dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}[a, b]$, el volumen que se genera al girar la región determinada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje OX viene dado por la siguiente integral:

$$V_{ab} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Si la región que se desea girar viene acotada por dos funciones $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, con $g(x) < f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el volumen del sólido de revolución viene dado por:

$$V_{ab} = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

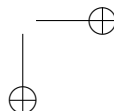
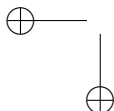
Si $f(x)$ es tal que existe $f^{-1}(y)$ inversa continua de $f(x)$ entonces se define el volumen que se genera al girar la región determinada por $f(x)$, el eje OY y las rectas $y = f(a)$ e $y = f(b)$ alrededor del eje OY por la siguiente integral:

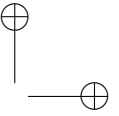
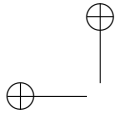
$$V_{ab} = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2 dy$$

Si la región que se desea girar viene acotada por dos funciones $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, tales que existen $g^{-1}(y)$ y $f^{-1}(y)$ continuas y $g^{-1}(y) < f^{-1}(y)$ para todo $y \in [f(a), f(b)]$, entonces el volumen del sólido de revolución alrededor del eje OY viene dado por:

$$V_{ab} = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [(f^{-1}(y))^2 - (g^{-1}(y))^2] dy$$

Ejemplo: Calcular el volumen que se genera al girar alrededor del eje OX la región determinada por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) := \sqrt{1 - x^2}$, entre los puntos





$a = -1$ y $b = 1$.

```
(%i39) kill(f,g);
```

```
(%o39)
```

done

```
(%i40) f(x):=sqrt(4-x^2);
```

```
(%o40)
```

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2}$$

```
(%i41) g(x):=sqrt(1-x^2);
```

```
(%o41)
```

$$g(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

```
(%i42) %pi*integrate(f(x)^2-g(x)^2,x,-1,1);
```

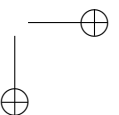
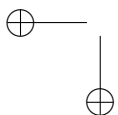
```
(%o42)
```

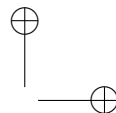
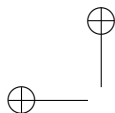
$$6\pi$$



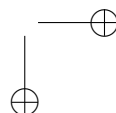
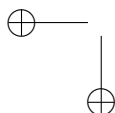
Ejercicios

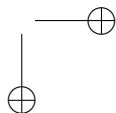
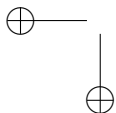
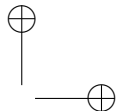
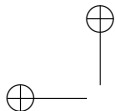
1. Calcular el área acotada por $f(x) = e^x$ y $g(x) = 4 - x^2$.
2. Calcular la longitud del arco de curva $y = x^2 + x + 1$ desde $a = 0$ hasta $b = 5$.
3. Calcular el área de la superficie de revolución que se forma al girar la gráfica de la función $g(x) = x$ alrededor del eje OX entre los puntos $a = 0$ y $b = 10$. ¿Qué superficie se forma? ¿Coincide el resultado con la fórmula de la superficie de dicha figura?.

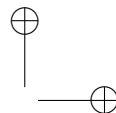
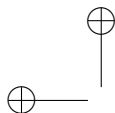




4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las funciones $h_1(x) = 5 + \sqrt{1 - x^2}$ y $h_2(x) = 5 - \sqrt{1 - x^2}$ alrededor del eje OX entre los puntos $a = -1$ y $b = 1$. ¿Qué sólido se forma? ¿Coincide los resultado con la fórmula del volumen de dicha sólido?.

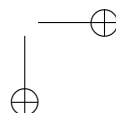
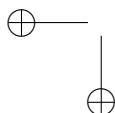


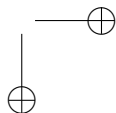
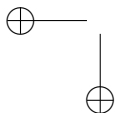
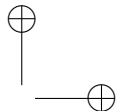
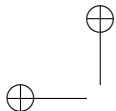


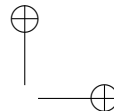
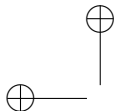


Parte V

Cálculo diferencial de funciones reales de varias variables







7

Extremos relativos de funciones de dos variables



Contenidos

1. Puntos máximos y mínimos relativos de una función de dos variables
2. Puntos críticos
3. Matriz hessiana y hessiano
4. Criterio de las derivadas segundas

En esta práctica calculamos los puntos críticos de una función de dos variables $f(x, y)$ y utilizamos el test de las derivadas segundas para averiguar la naturaleza de cada uno de ellos. Representamos la superficie y lo comprobamos. Vemos gráficamente que un punto de silla no es ni máximo ni mínimo.

7.1 Definiciones, hessiano, puntos criticos y test

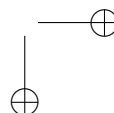
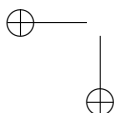
Una función $f : R \in R^2 \rightarrow R$ tiene un máximo relativo en el punto $(a, b) \in R$ si

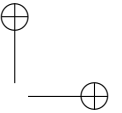
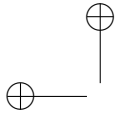
$$f(a, b) \geq f(x, y)$$

para todo (x, y) en cierto entorno de (a, b) . La superficie tiene un punto máximo relativo en $(a, b, f(a, b))$. De forma similar, f tiene un mínimo relativo en (a, b) si se verifica

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

para todo (x, y) en cierto entorno de (a, b) . La superficie tiene un punto mínimo relativo en $(a, b, f(a, b))$.





Estos puntos se encuentran en el conjunto de puntos críticos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0\}.$$

El hessiano de f en (x, y) es el determinante de la matriz hessiana

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Definimos el hessiano de una función $f(x, y)$ con Maxima y lo llamamos Hessiano:

```
(%i25) Hessiano(x,y):=('diff(f(x,y),x,2)*'diff(f(x,y),y,2))-  
('diff(f(x,y),x,1,y,1)*'diff(f(x,y),x,1,y,1));  
(%o25)
```

$$\text{Hessiano}(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} f(x, y) \left(\frac{d^2}{dy^2} f(x, y) \right) - \frac{d^2}{dx dy} f(x, y) \left(\frac{d^2}{dx dy} f(x, y) \right)$$

Si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$, entonces:

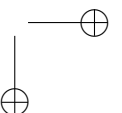
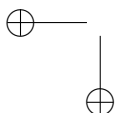
- Si $|H(f)(a, b)| > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo.
- Si $|H(f)(a, b)| > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo.
- Si $|H(f)(a, b)| < 0$, entonces f tiene en (a, b) un punto de silla.
- Si $|H(f)(a, b)| = 0$, el criterio no decide.

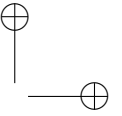
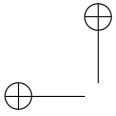
7.2 Ejemplo

Sea, por ejemplo, la función $f(x, y) := x y e^{-x^2-y^2}$. Vamos a calcular sus puntos críticos:

```
(%i26) f(x,y):=x*y*e^(-x^2-y^2)$  
(%i27) puntoscriticos:solve([diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)], [x,y]);  
(%o27)
```

$$\left[x = 0, y = 0 \right], \left[x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right], \left[x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right], \left[x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \left[x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$





Para aplicar el test a estos puntos tenemos que calcular el hessiano para esta función en particular, lo llamamos `hessiano`:

```
(%i28) Hessiano(x,y)$  
(%i29) hessiano(x,y):=ev(Hessiano(x,y),diff)$  
(%i30) hessiano(x,y);  
(%o30)
```

$$\left(4x^3ye^{-y^2-x^2}-6xye^{-y^2-x^2}\right)\left(4xy^3e^{-y^2-x^2}-6xye^{-y^2-x^2}\right)-\left(4x^2y^2e^{-y^2-x^2}-2y^2e^{-y^2-x^2}-2x^2e^{-y^2-x^2}\right)$$

y sustituimos cada uno de los puntos críticos.

En primer lugar, consideramos los puntos $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, que son respectivamente los elementos 3 y 4 de la lista `puntoscriticos`. Evaluamos el hessiano y la derivada parcial segunda $f_{xx}(x,y)$ en estos puntos con la orden `at` y aplicamos el test:

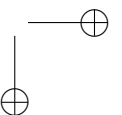
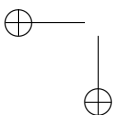
```
(%i31) is(at(hessiano(x,y),puntoscriticos[3])>0);  
(%o31)  
true
```

```
(%i32) is(at(hessiano(x,y),puntoscriticos[4])>0);  
(%o32)  
true
```

```
(%i33) fxx(x,y):=diff(f(x,y),x,2)$  
(%i34) fxx(x,y);  
(%o34)
```

$$4x^3ye^{-y^2-x^2}-6xye^{-y^2-x^2}$$

```
(%i35) is(at(fxx(x,y),puntoscriticos[3])>0);  
(%o35)  
true
```

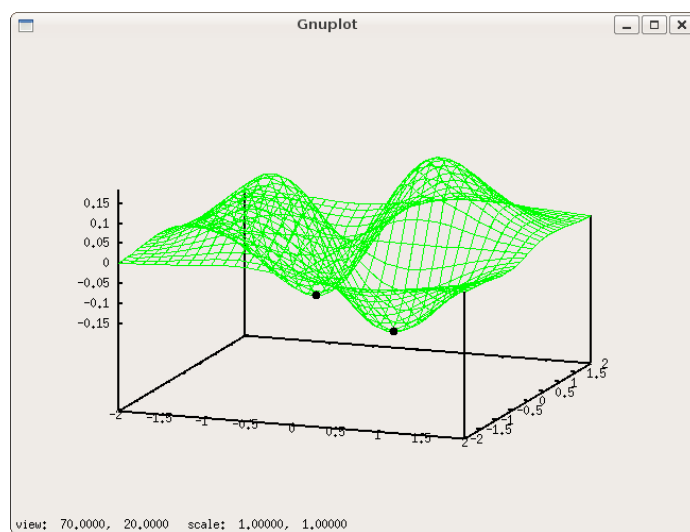


```
(%i36) is(at(fxx(x,y),puntoscriticos[4])>0);
(%o36)
true
```

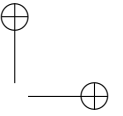
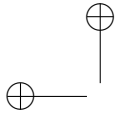
La función f tiene en los puntos $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos relativos.

Representamos la superficie y los puntos donde se alcanzan estos mínimos:

```
(%i37) load("draw")$
(%i38) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),color=black,
point_size=2,point_type=filled_circle,points([[1/sqrt(2),-1/sqrt(2),f(1,
(%o38)
[gr3d(explicit,points)]
```



En segundo lugar, comprobamos que f tiene en los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ máximos relativos.



```
(%i39) is(at(hessiano(x,y),puntoscriticos[2])>0);  
(%o39)
```

true

```
(%i40) is(at(hessiano(x,y),puntoscriticos[5])>0);  
(%o40)
```

true

```
(%i41) is(at(fxx(x,y),puntoscriticos[2])<0);  
(%o41)
```

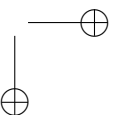
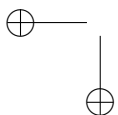
true

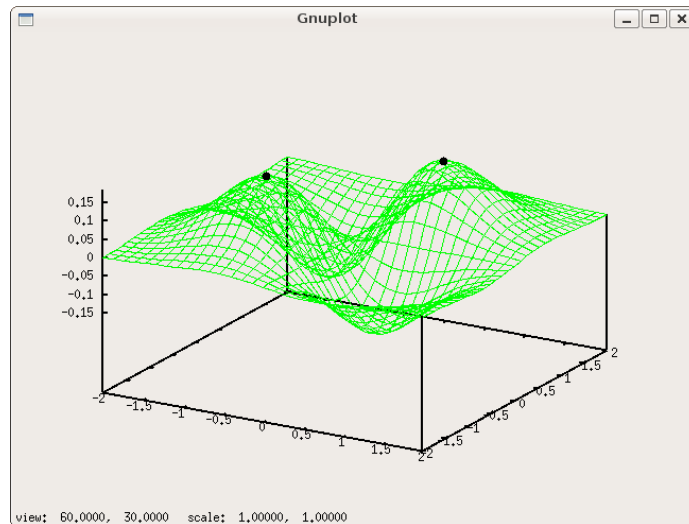
```
(%i42) is(at(fxx(x,y),puntoscriticos[5])<0);  
(%o42)
```

true

Representamos la superficie y los puntos máximos:

```
(%i43) load("draw")$  
(%i44) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),color=black,  
    point_size=2,point_type=filled_circle,points([[1/sqrt(2),1/sqrt(2),f(1/sqrt(2),1/sqrt(2))]]))  
(%o44)  
  
[gr3d(explicit,points)]
```





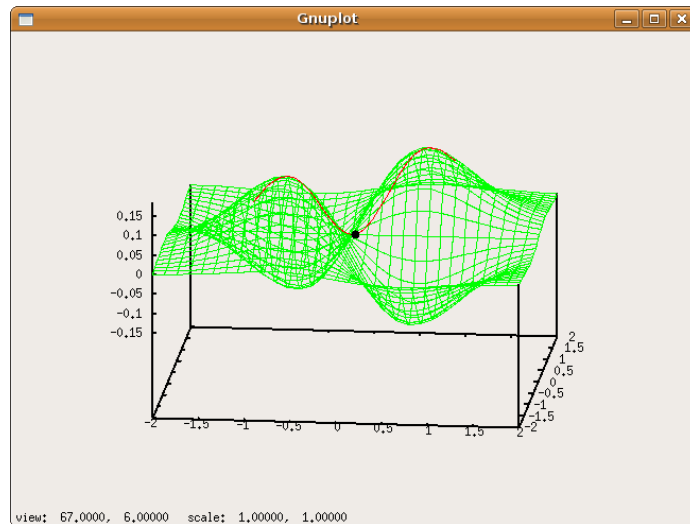
Veamos por último la naturaleza del punto $(0, 0)$.

Si consideramos sólo los puntos de la superficie intersección con el plano $y = x$, es decir, para los puntos de la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = f(t, t) \end{cases}$$

f tiene en el punto $(0, 0)$ un mínimo. Gráficamente:

```
(%i45) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),color=red,
parametric(t,t,f(t,t),t,-1,1),
color=black,point_size=2,point_type=filled_circle,points([[0,0,0]]));
(%o45)
[gr3d (explicit, parametric, points)]
```



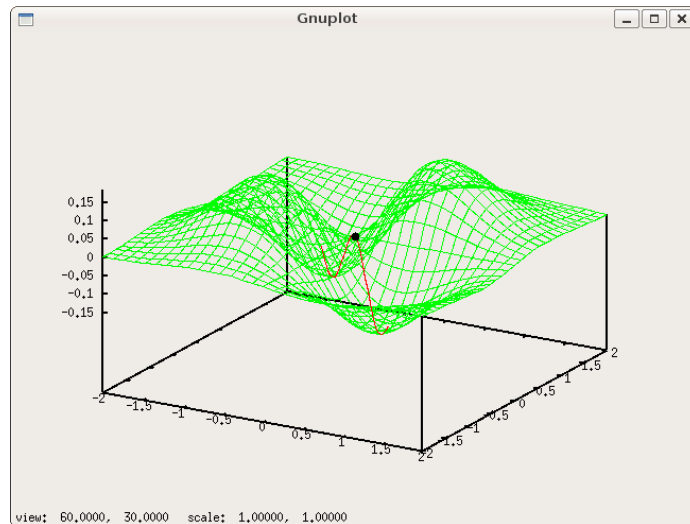
Sin embargo, para los puntos de la curva intersección de la superficie con el plano $y = -x$, es decir, para los puntos de la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = f(t, -t) \end{cases}$$

f tiene en el punto $(0, 0)$ un máximo. Gráficamente:

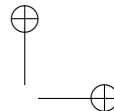
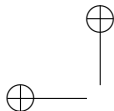
```
(%i22) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),color=red,
parametric(t,-t,f(t,-t),t,-1,1),
color=black,point_size=2,point_type=filled_circle,points([[0,0,0]]));
(%o22)
```

```
[gr3d(explicit,parametric,points)]
```



Por tanto, f no tienen en el punto $(0,0)$ ni máximo ni mínimo. En este caso, f tiene un punto de silla, como lo verifica el test de las derivadas segundas el hessiano en $(0,0)$ es negativo:

```
(%i47) is(at(hessiano(x,y),puntoscriticos[1])<0);
(%o47)
true
```



8

Derivadas parciales de funciones de varias variables



Contenidos

1. Cálculo de derivadas parciales de funciones de varias variables.
2. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de primer orden de una función de dos variables.

En esta práctica calculamos las derivadas parciales de algunas funciones de varias variables, tanto de primer orden como de orden superior.

Analizamos la interpretación geométrica de las derivadas parciales de primer orden en un punto (a, b) , $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, de una función de dos variables $f(x, y)$, como las pendientes de las rectas tangentes a las curvas intersección de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$, con los planos de ecuaciones $y = b$ y $x = a$ respectivamente. Lo hacemos con un ejemplo, calculamos las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva intersección en un punto determinado, y representamos la superficie, las curvas y las respectivas rectas tangentes.

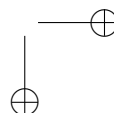
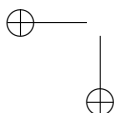
8.1 Derivadas parciales de funciones de varias variables

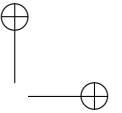
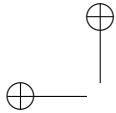
Con la orden `diff` podemos calcular derivadas parciales de funciones de varias variables.

Ejemplo: Calculamos la primera derivada parcial, $f_x(x, y, z)$, de la función de tres variables

$$f(x, y, z) = x + \sin(xy) + \ln(xz)$$

y la llamamos `fx`:





```
(%i5) f(x,y,z):=x+sin(x*y)+log(x*z)$  
(%i6) fx:=diff(f(x,y,z),x);  
(%o6)
```

$$y \cos(xy) + \frac{1}{x} + 1$$

Las otras dos derivadas parciales primeras $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$ las llamamos f_y , f_z respectivamente:

```
(%i7) fy:=diff(f(x,y,z),y);  
(%o7)
```

$$x \cos(xy)$$

```
(%i8) fz:=diff(f(x,y,z),z);  
(%o8)
```

$$\frac{1}{z}$$

Ejemplo: Calculamos $f_x(\pi/2, 1/2, 1)$ de la función f del ejemplo anterior:

```
(%i9) fx,x=%pi/2,y=1/2,z=1;  
(%o9)
```

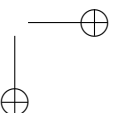
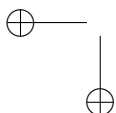
$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1$$

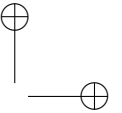
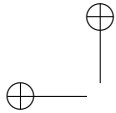
Ejemplo: Algunas derivadas parciales sucesivas de la misma función f :

$$f_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z), f_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z), f_{zyx}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) :$$

```
(%i10) diff(f(x,y,z),x,2);  
(%o10)
```

$$-y^2 \sin(xy) - \frac{1}{x^2}$$





```
(%i11) diff(f(x,y,z),y,1,x,1);  
(%o11)  
cos(x y) - x y sin(x y)
```

```
(%i12) diff(f(x,y,z),x,1,y,1,z,1);  
(%o12)  
0
```

```
(%i13) kill(all)$
```

Ejemplo: Comprobamos que la función $z(x, t) = \sin(x - ct)$, con c constante, satisface la ecuación de ondas

$$f_{tt} = c^2 f_{xx} :$$

```
(%i3) z(x,t):=sin(x-c*t)$  
(%i4) is(ratsimp(diff(z(x,t),t,2)=c^2*diff(z(x,t),x,2)));  
(%o4)  
true
```

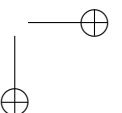
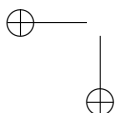
```
(%i5) kill(all)$
```

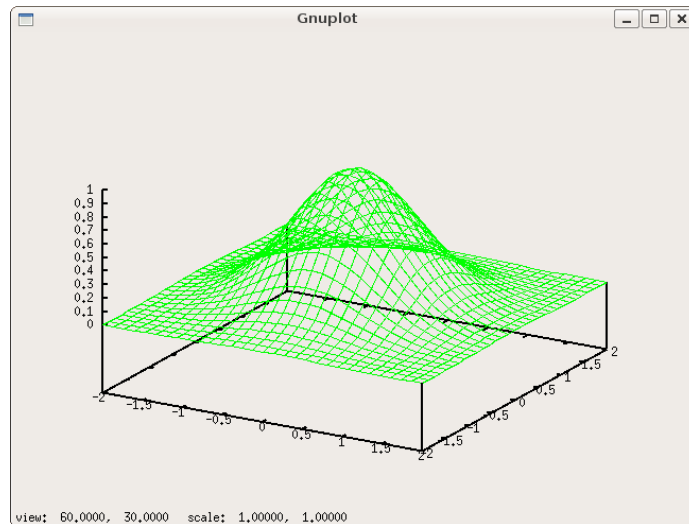
8.2 Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Consideramos como ejemplo la función de dos variables $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, con dominio R^2 y el punto $(1/2, -1/2) \in R^2$.

La gráfica de dicha función $f(x, y)$ en $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ es la superficie

```
(%i5) f(x,y):=%e^(-x^2-y^2)$  
(%i6) load("draw")$  
(%i7) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2))$
```





La curva intersección de la superficie con el plano $y = -1/2$ tiene como ecuación

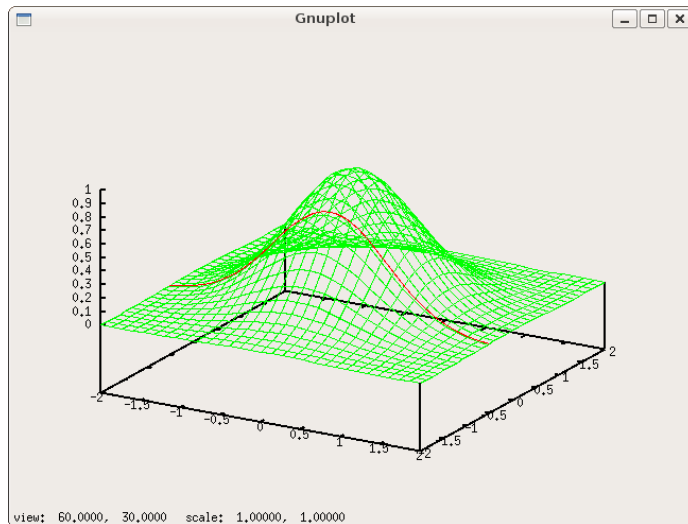
$$\begin{cases} z = f(x, -1/2) \\ y = -1/2 \end{cases},$$

que en coordenadas paramétricas es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1/2 \\ z = f(t, -1/2) \end{cases}$$

Si las representamos gráficamente:

```
(%i8) draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),
color=red,parametric(t,-1/2,f(t,-1/2),t,-2,2))$
```



Geoméricamente, la derivada parcial $f_x(x, y)$ de la función $f(x, y)$ en el punto $(1/2, -1/2)$, $f_x(1/2, -1/2)$, es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(1/2, -1/2, f(1/2, -1/2))$.

La recta está en el plano $y = -1/2$. La ecuación es:

$$\begin{cases} z = f_x(1/2, -1/2)x + b \\ y = -1/2 \end{cases}.$$

Calculamos e introducimos, en una variable que llamamos px , la pendiente de la recta $f_x(1/2, -1/2)$:

```
(%i9) diff(f(x,y),x);
```

```
(%o9) 
$$-2xe^{-y^2-x^2}$$

```

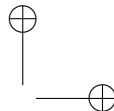
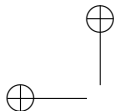
```
(%i10) px:%,x=1/2,y=-1/2;
```

```
(%o10) 
$$-\frac{1}{\sqrt{e}}$$

```

La ecuación de la recta la llamamos ec :

```
(%i11) ec:z=px*x+b;
```



(%o11)

$$z = b - \frac{x}{\sqrt{e}}$$

Para calcular b obligamos a que el punto $(1/2, -1/2, f(1/2, -1/2))$ pertenezca a la recta.

(%i12) `ec,x=1/2,z=f(1/2,-1/2);`

(%o12)

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = b - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

(%i13) `b:solve(%,b);`

(%o13)

$$\left[b = \frac{3}{2\sqrt{e}} \right]$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1/2, -1/2, f(1/2, -1/2))$ es

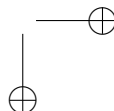
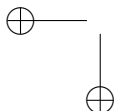
$$\begin{cases} z = \frac{3}{2\sqrt{e}} - \frac{x}{\sqrt{e}} \\ y = -1/2 \end{cases}$$

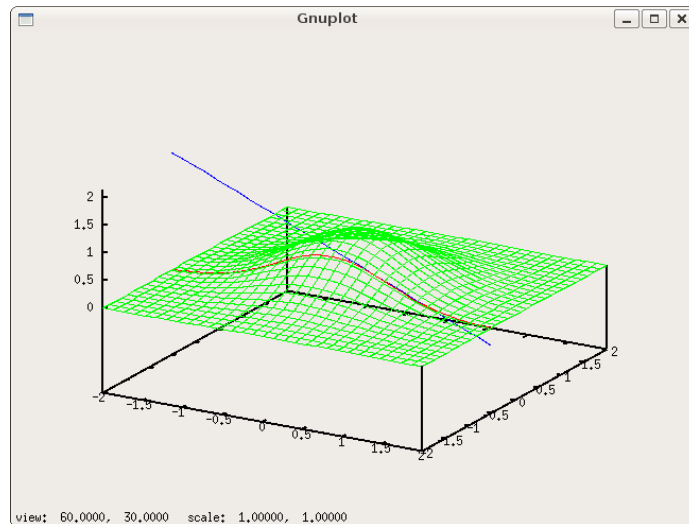
Que en coordenadas paramétricas tiene por ecuación:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1/2 \\ z = \frac{3}{2\sqrt{e}} - \frac{t}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

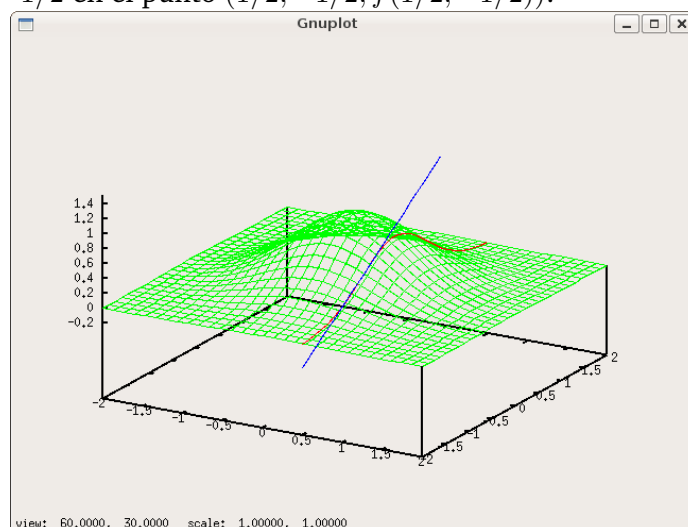
Gráficamente:

(%i6) `draw3d(color=green,explicit(f(x,y),x,-2,2,y,-2,2),color=red,paramet`





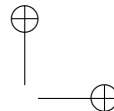
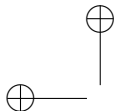
De la misma forma, podemos interpretar la derivada $f_y(1/2, -1/2)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano $x = 1/2$ en el punto $(1/2, -1/2, f(1/2, -1/2))$:



Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3 * x^2$. Calcula las siguientes derivadas:





- a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. (Se deriva primero respecto de y y luego respecto de x).
b) $f_{xy}(x, y)$. Se deriva primero respecto de x y luego respecto de y .
c) $f_{xy}(3, 2)$.

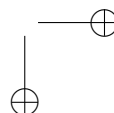
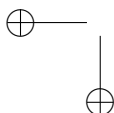
2. Prueba que la función $f(x, y) = e^x \sin y$ es armónica, es decir, es dos veces derivable, con derivadas segundas continuas y satisface la ecuación de Laplace

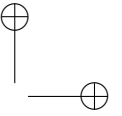
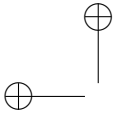
$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

3. La ley de los gases ideales dice que $PV = kT$, donde P es la presión, T la temperatura, V el volumen del gas y k una constante. Demuestra que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

4. Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x, y) = xy^3 + x^3y$ en $P(1, -1, -2)$ en la dirección del eje x y en la del eje y .





9

Derivadas de funciones compuestas

Contenidos



1. Funciones compuestas.
2. Regla de la cadena para funciones de varias variables.

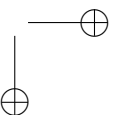
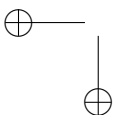
En esta práctica aplicamos la regla de la cadena para calcular derivadas de funciones compuestas de varias variables. Con la orden `depends` podemos declarar dependencias de funciones. Comprobamos que en el caso de tener funciones compuestas, la orden `diff` aplica la regla de la cadena. Además calculamos derivadas de funciones compuestas cuyas funciones componentes vienen definidas de forma explícita. Por último, usamos el paquete de derivadas posicionales `pdiff` para derivar funciones compuestas en las que alguna de ellas no se conoce.

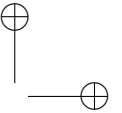
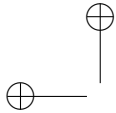
9.1 Regla de la cadena

Podemos declarar variables dependientes de otras con la orden `depends` con el fin de calcular derivadas. La orden `diff` aplica la regla de la cadena a esas funciones compuestas.

Ejemplo: Sea la función de dos variables $f(x, y)$, donde x e y son funciones de una variable independiente t : $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Para calcular la derivada $\frac{df}{dt}$, declaramos las dependencias con la orden `depends` y derivamos con `diff`:

```
(%i1) depends(f, [x, y], [x, y], t);
```





```
(%o1)
```

$$[f(x, y), x(t), y(t)]$$

```
(%i2) diff(f,t);
```

```
(%o2)
```

$$\frac{d}{dy} f \left(\frac{d}{dt} y \right) + \frac{d}{dx} f \left(\frac{d}{dt} x \right)$$

```
(%i3) remove(all,dependency);
```

```
(%o3)
```

done

La orden `diff`, en este caso, aplica la regla de la cadena para calcular la derivada:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Se cancelan las dependencias de las variables con `remove(all,dependency)`.

Ejemplo: Consideramos el caso de una función de dos variables $x, y, f(x, y)$, que a su vez dependen de otras dos variables independientes s y $t, x(s, t), y(s, t)$.

Queremos calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial s}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$:

```
(%i4) depends(f, [x,y], [x,y], [s,t]);
```

```
(%o4)
```

$$[f(x, y), x(s, t), y(s, t)]$$

```
(%i5) diff(f,s);
```

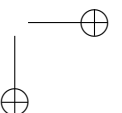
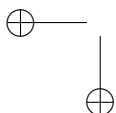
```
(%o5)
```

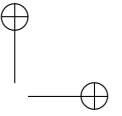
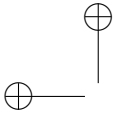
$$\frac{d}{dy} f \left(\frac{d}{ds} y \right) + \frac{d}{dx} f \left(\frac{d}{ds} x \right)$$

```
(%i6) diff(f,t);
```

```
(%o6)
```

$$\frac{d}{dy} f \left(\frac{d}{dt} y \right) + \frac{d}{dx} f \left(\frac{d}{dt} x \right)$$





```
(%i7) remove(all, dependency);  
(%o7)  
  
done
```

El resultado lo entendemos como la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

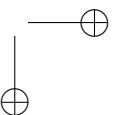
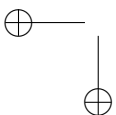
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

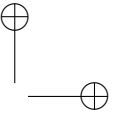
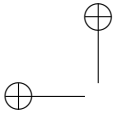
Así podemos generalizar la regla de la cadena al caso de funciones de n variables que dependen cada una de un número m de variables independientes. La regla de la cadena se aplicará en estos casos de la misma forma.

Ejemplo: En el caso de una función de tres variables $f(x, y, z)$, tal que $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y $z = z(s, t)$, calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t},$$

```
(%i8) depends(f, [x, y, z], [x, y, z], [s, t]);  
(%o8)  
[f(x, y, z), x(s, t), y(s, t), z(s, t)]  
  
(%i9) diff(f, s);  
(%o9)  
 $\frac{d}{dz} f \left( \frac{d}{ds} z \right) + \frac{d}{dy} f \left( \frac{d}{ds} y \right) + \frac{d}{dx} f \left( \frac{d}{ds} x \right)$   
  
(%i10) diff(f, t);  
(%o10)  
 $\frac{d}{dz} f \left( \frac{d}{dt} z \right) + \frac{d}{dy} f \left( \frac{d}{dt} y \right) + \frac{d}{dx} f \left( \frac{d}{dt} x \right)$ 
```





```
(%i11) remove(all,dependency)$
```

Ejemplo: Sea $f(x)$ tal que $x = x(t)$. Calculamos $\frac{d^2 f}{dt^2}$ por la regla de la cadena:

```
(%i12) depends(f,x,x,t)$
```

```
(%i13) diff(f,t,2);
```

```
(%o13)
```

$$\frac{d}{dx} f \left(\frac{d^2}{dt^2} x \right) + \frac{d^2}{dx^2} f \left(\frac{d}{dt} x \right)^2$$

```
(%i14) remove(f,dependency)$
```

Ejemplo: Derivamos ahora una expresión en la que aparece una función compuesta. Por ejemplo, sea $f(x)$, tal que $x = x(t)$. Para ello calculamos

$$\frac{d}{dt} (t f(x(t)))$$

```
(%i15) depends(f,x,x,t)$
```

```
(%i16) diff(t*f,t);
```

```
(%o16)
```

$$\frac{d}{dx} f t \left(\frac{d}{dt} x \right) + f$$

```
(%i17) remove(f,dependency)$
```

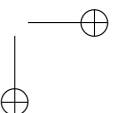
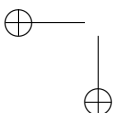
9.2 Las funciones componentes vienen definidas de forma explícita

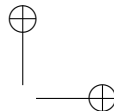
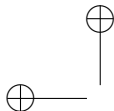
Ahora vamos a usar la orden `diff` para derivar funciones compuestas cuyas funciones componentes están definidas.

Ejemplo: Sea $f(x, y) = xy + y^2$, tal que $x(t) = \sin t$, $y(t) = e^t$. Para calcular df/dt :

```
(%i18) f(x,y):=x*y+y^2$
```

```
(%i19) diff(f(sin(t),%e^t),t);
```





(%o19)

$$e^t \sin t + e^t \cos t + 2e^{2t}$$

(%i20) kill(f)\$

Ejemplo: Sea $f(x, y) = xy + x^2 + y^2$, donde $x(t) = r \cos(t)$, $y(t) = r \sin(t)$.
Calculamos $\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t}$:

(%i21) f(x,y):=x*y+x^2+y^2\$

(%i22) diff(f(r*cos(t),r*sin(t)),r);

(%o22)

$$2r (\sin t)^2 + 2r \cos t \sin t + 2r (\cos t)^2$$

(%i23) diff(f(r*cos(t),r*sin(t)),t);

(%o23)

$$r^2 (\cos t)^2 - r^2 (\sin t)^2$$

Ejemplo: Evaluamos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\pi, 0)$$

donde f es la función del ejemplo anterior:

(%i24) diff(f(r*cos(t),r*sin(t)),t)\$

(%i25) %,r=%pi,t=0;

(%o25)

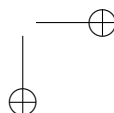
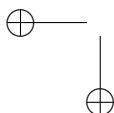
$$\pi^2$$

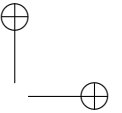
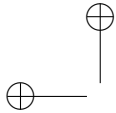
(%i26) kill(f)\$

Ejemplo: Sea $f(x) = \sin x$ y $x(t) = t^2$, la derivada de la función compuesta:

(%i27) f(x):=sin(x)\$

(%i28) diff(f(t^2),t);





```
(%o28)
```

$$2t \cos t^2$$

```
(%i29) kill(f)$
```

9.3 Algunas de las funciones componentes no estan definidas explicitamente

Si alguna de las funciones componentes de una función compuesta no está definida de forma explícita, para calcular la derivada tendremos que cargar el paquete de derivadas posicionales `pdiff`. Este paquete trabaja con derivadas de funciones no conocidas, se representa la posición y el orden de la derivada de una determinada variable y no la variable con respecto a la que se deriva.

Ejemplo: La derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ de una función $f(x, y)$, se representa, usando `pdiff`, $D_{2,0}f(x, y)$:

```
(%i30) load(pdiff)$  
(%i31) diff(f(x,y),x,2);  
(%o31)
```

$$f_{(2,0)}(x, y)$$

```
(%i32) diff(f(x,y),x,2),use_pdiff:false;  
(%o32)
```

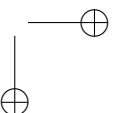
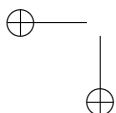
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, y)$$

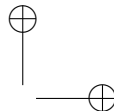
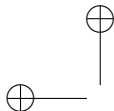
Si en un momento determinado nos interesa definir la función, podemos hacerlo definiendo f y evaluando la expresión con `ev`:

Ejemplo: Si $f(x, y) = xy^2$, calculamos

```
(%i33) ec:diff(f(x,y),x,2);  
(%o33)
```

$$f_{(2,0)}(x, y)$$





```
(%i34) f(x,y):=x^3*y^2;
```

```
(%o34)
```

$$f(x,y) := x^3 y^2$$

```
(%i35) ev(ec);
```

```
(%o35)
```

$$6 x y^2$$

```
(%i36) kill(all)$
```

Ejemplo: `pdiff` aplica la regla de la cadena a funciones en la que alguna no está definida explícitamente.

Sea $f(x, y)$ tal que $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$, calculamos $\frac{df}{dt}$.

```
(%i1) diff( f(%e^t,%e^(-t)),t);
```

```
(%o1)
```

$$e^t f_{(1,0)}(e^t, e^{-t}) - e^{-t} f_{(0,1)}(e^t, e^{-t})$$

Ejemplo: Comprobamos que $y = f(x - ct) + g(x + ct)$ es solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} :$$

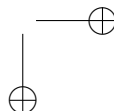
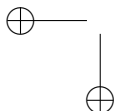
```
(%i2) y:f(x-c*t)+g(x+c*t)$
```

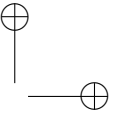
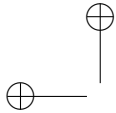
```
(%i3) is(ratsimp(diff(y,t,2)=c^2*diff(y,x,2)));
```

```
(%o3)
```

true

```
(%i4) kill(y)$
```





Ejemplo: Hacemos un cambio de variable en el operador laplaciano. Sea $f(r)$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Demostramos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}.$$

```
(%i5) aux: (x^2+y^2+z^2)^(1/2)$
(%i6) diff(f(aux), x, 2)+diff(f(aux), y, 2)+diff(f(aux), z, 2)$
(%i7) ratsimp(%)$
(%i8) expand(%)$
(%i9) factor(%)$
(%i10) subst(r, aux, %);
(%o10)
```

$$\frac{r f_{(2)}(r) + 2 f_{(1)}(r)}{r}$$

Ejemplo: Hacemos un cambio de variable independiente $t = \log(x)$ en la ecuación diferencial de Cauchy-Euler homogénea, para transformarla en una ecuación de coeficientes constantes y fácil de resolver.

```
(%i11) kill(all)$
(%i1) ec: a*x^2*'diff(y, x, 2)+b*x*'diff(y, x)+c*y=0;
(%o1)
```

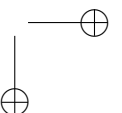
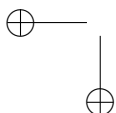
$$a x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + b x \left(\frac{d}{dx} y \right) + c y = 0$$

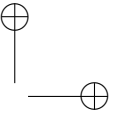
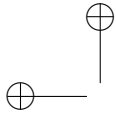
```
(%i2) ec: subst(f(log(x)), y, ec);
(%o2)
```

$$a x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} f(\log x) \right) + b x \left(\frac{d}{dx} f(\log x) \right) + c f(\log x) = 0$$

```
(%i3) ev(ec, diff);
(%o3)
```

$$a x^2 \left(\frac{f_{(2)}(\log x)}{x^2} - \frac{f_{(1)}(\log x)}{x^2} \right) + b f_{(1)}(\log x) + c f(\log x) = 0$$





```
(%i4) ratsimp(%);
```

```
(%o4)
```

$$a f_{(2)}(\log x) + (b - a) f_{(1)}(\log x) + c f(\log x) = 0$$

```
(%i5) ec:subst(t,log(x),%);
```

```
(%o5)
```

$$a f_{(2)}(t) + (b - a) f_{(1)}(t) + c f(t) = 0$$

Ejercicios



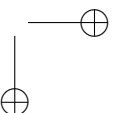
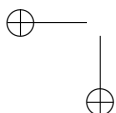
1. Sea $f(x, y)$, donde $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. Comprueba que se verifica

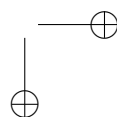
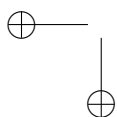
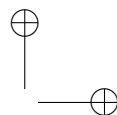
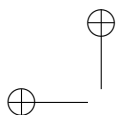
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

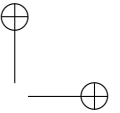
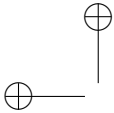
2. Calcula las derivadas parciales primeras de $u(x, y, z)$, donde x, y, z son funciones de t y s .
3. Sea la ecuación en derivadas parciales

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

donde a, b y c son constantes arbitrarias. Demuestra que para que $z = f(y + mx)$ sea solución de la ecuación, debe ser $am^2 + bm + c = 0$.







10

Derivadas de funciones implícitas

Contenidos



1. Regla de la cadena.
2. Teorema de la función implícita.

En esta práctica calculamos derivadas de funciones de una y dos variables que vienen dadas de forma implícita. Lo hacemos de dos formas distintas, usando la regla de la cadena y también derivando directamente en la ecuación que relaciona la función y sus variables.

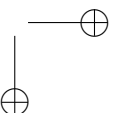
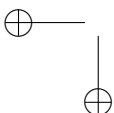
10.1 Usando la regla de la cadena

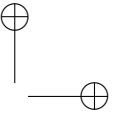
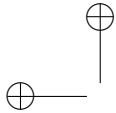
Supongamos que x e y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, que además, $F(x, y) = 0$ define a $y = y(x)$ como función diferenciable de x . Entonces, podemos considerar $F(x, y(x)) = 0$. Para calcular $\frac{dy}{dx}$ aplicamos la regla de la cadena a la ecuación.

Declaramos las dependencias de cada una de las funciones con `depends`

```
(%i1) depends (F, [x, y], y, x) $
```

Una vez declaradas las dependencias, derivamos la ecuación $F(x, y(x)) = 0$, (regla de la cadena), respecto de x y a continuación despejamos la derivada $\frac{dy}{dx}$:





```
(%i2) diff(F,x);  
(%o2)
```

$$\frac{d}{dx} y \left(\frac{d}{dy} F \right) + \frac{d}{dx} F$$

```
(%i3) solve(%, 'diff(y,x));  
(%o3)
```

$$\left[\frac{d}{dx} y = - \frac{\frac{d}{dx} F}{\frac{d}{dy} F} \right]$$

```
(%i4) remove(all,dependency)$  
(%i5) kill(all)$
```

Ejemplo: Calculamos $y'(x)$, si y viene definida por la ecuación $x^2 + y^2 + xy + x^3 + y = 0$ mediante las fórmulas calculadas anteriormente.

Sea $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x^3 + y$, F es diferenciable en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x + 1$. Entonces $F(x, y) = 0$ define a $y = y(x)$ diferenciable en un intervalo que contiene a x excepto en los puntos de la recta $2y + x + 1 = 0$.

Aplicamos la ecuación anterior para calcular la derivada $y'(x)$ que guardamos en la variable `dydx`:

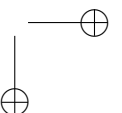
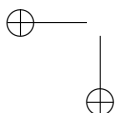
```
(%i1) F(x,y):=x^2+y^2+x*y+x^3+y$  
(%i2) dydx:-diff(F(x,y),x)/diff(F(x,y),y);  
(%o2)
```

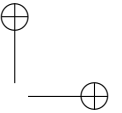
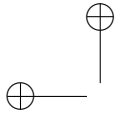
$$\frac{-y - 3x^2 - 2x}{2y + x + 1}$$

Sea ahora la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y supongamos que define a z como función implícita de x e y , entonces podemos considerar $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Vamos a continuación a calcular las derivadas parciales primeras de z , z_x y z_y .

Creamos las dependencias de las funciones que entran en juego, F depende de x , y , z y z a su vez depende de x , y . Usamos la orden `depends`:

```
(%i1) depends(F,[x,y,z],z,[x,y])$
```





Para calcular z_x derivamos F con respecto a x y despejamos z_x :

```
(%i2) diff(F,x);
```

```
(%o2)
```

$$\frac{d}{dx} z \left(\frac{d}{dz} F \right) + \frac{d}{dx} F$$

```
(%i3) solve(%, 'diff(z,x));
```

```
(%o3)
```

$$\left[\frac{d}{dx} z = - \frac{\frac{d}{dx} F}{\frac{d}{dz} F} \right]$$

De la misma forma z_y :

```
(%i4) diff(F,y);
```

```
(%o4)
```

$$\frac{d}{dy} z \left(\frac{d}{dz} F \right) + \frac{d}{dy} F$$

```
(%i5) solve(%, 'diff(z,y));
```

```
(%o5)
```

$$\left[\frac{d}{dy} z = - \frac{\frac{d}{dy} F}{\frac{d}{dz} F} \right]$$

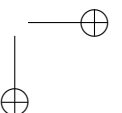
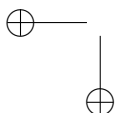
```
(%i6) remove(all,dependency)$
```

```
(%i7) kill(all)$
```

Ejemplo: Sea $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Tendremos $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$. La función F es diferenciable en todo punto y $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. Entonces F define a z como función implícita diferenciable de x e y para todos los puntos excepto los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$. Para calcular sus derivadas parciales utilizamos las fórmulas que hemos calculado anteriormente. La derivada z_x la guardamos en la variable `dzdx` y la derivada z_y en la variable `dzdy`:

```
(%i1) F(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-25$
```

```
(%i2) dzdx:-diff(F(x,y,z),x)/diff(F(x,y,z),z);
```



(%o2)

$$-\frac{x}{z}$$

(%i3) dzdy:-diff(F(x,y,z),y)/diff(F(x,y,z),z);

(%o3)

$$-\frac{y}{z}$$

(%i4) remove(all,dependency)\$

(%i5) kill(all)\$

10.2 Derivando directamente la ecuación

De forma más práctica, derivamos la propia ecuación.

Ejemplo: Sea la ecuación $2 \sin x \cos y = 1$. Calculamos $y'(x)$ por derivación implícita.

Declaramos la dependencia con `depends`, definimos la ecuación y la llamamos `ec`, derivamos y despejamos la derivada. La salida es una lista de un solo elemento que guardamos en una variable que llamamos `der`:

(%i17) depends(y,x)\$

(%i18) ec:2*sin(x)*cos(y)=1;

(%o18)

$$2 \sin x \cos y = 1$$

(%i19) diff(ec,x);

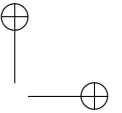
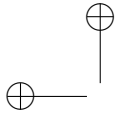
(%o19)

$$2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y \left(\frac{d}{dx} y \right) = 0$$

(%i20) der:solve(%, 'diff(y,x));

(%o20)

$$\left[\frac{d}{dx} y = \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \right]$$



Como hemos comprobado, al usar `solve` la salida es una lista que nosotros hemos llamado `der`. En esta lista está el valor de la derivada $y'(x)$ el cuál usaremos en cálculos posteriores. Este valor es, del primer (único) elemento de esa lista, la parte que está a la derecha del igual. Podemos usar para extraer esa parte la orden `second(exp)` y lo guardamos en una variable que llamamos `dydx`.

```
(%i21) dydx:second(der[1]);  
(%o21) 
$$\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y}$$

```

Ejemplo: Calculamos la derivada de la función del ejemplo anterior en el punto $x = \pi/4$, $y = \pi/4$, $y'(\pi/4)$.

```
(%i23) dydx,x=%pi/4,y=%pi/4;  
(%o23) 
$$1$$

```

```
(%i24) remove(all,dependency)$  
(%i25) kill(all)$
```

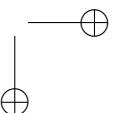
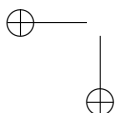
Ejemplo: Calculamos las derivadas parciales primeras de $z(x, y)$ tal que z está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Definimos la dependencia de z y la ecuación la llamamos `ec`:

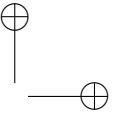
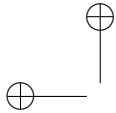
```
(%i1) depends(z,[x,y])$  
(%i2) ec:x^2+y^2+z^2=25$
```

Para calcular z_x derivamos toda la ecuación con respecto a x y despejamos. Guardamos la derivada z_x en una variable `dzdx`, para ello usamos la orden `second` como anteriormente.

```
(%i3) diff(ec,x);  
(%o3) 
$$2z \left( \frac{d}{dx} z \right) + 2x = 0$$

```





```
(%i4) solve(%,'diff(z,x));  
(%o4)
```

$$\left[\frac{d}{dx} z = -\frac{x}{z} \right]$$

```
(%i5) dzdx:second(%[1]);  
(%o5)
```

$$-\frac{x}{z}$$

Algo similar hemos de hacer para calcular z_y . En este caso guardamos la derivada parcial en la variable `dzdy`:

```
(%i6) diff(ec,y)$  
(%i7) solve(%,'diff(z,y))$  
(%i8) dzdy:second(%[1]);  
(%o8)
```

$$-\frac{y}{z}$$

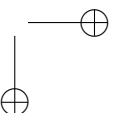
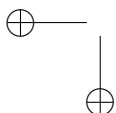
Ejemplo: Para calcular z_{xx} , derivamos la ecuación dos veces con respecto a x .

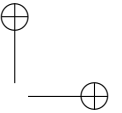
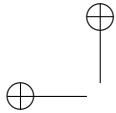
```
(%i12) diff(ec,x,2);  
(%o12)
```

$$2z \left(\frac{d^2}{dx^2} z \right) + 2 \left(\frac{d}{dx} z \right)^2 + 2 = 0$$

Observamos que en la ecuación derivada tenemos tanto z_{xx} como z_x . Antes de despejar, tendremos que sustituir la derivada z_x que hemos calculado antes y que hemos guardado en `dzdx`. Para hacer esto, usamos la orden `subst(exp1,exp2,exp)`, que sustituye en la expresión `exp`, `exp2` por `exp1`. Por último, despejamos z_{xx} :

```
(%i13) diff(ec,x,2);
```





(%o13)

$$2z \left(\frac{d^2}{dx^2} z \right) + 2 \left(\frac{d}{dx} z \right)^2 + 2 = 0$$

(%i14) `subst(dzdx,'diff(z,x),%)`;

(%o14)

$$2z \left(\frac{d^2}{dx^2} z \right) + \frac{2x^2}{z^2} + 2 = 0$$

(%i15) `solve(%, 'diff(z,x,2))`;

(%o15)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} z = -\frac{z^2 + x^2}{z^3} \right]$$

Para calcular z_{yy} :

(%i13) `diff(ec,y,2)`;

(%o13)

$$2z \left(\frac{d^2}{dy^2} z \right) + 2 \left(\frac{d}{dy} z \right)^2 + 2 = 0$$

(%i14) `subst(dzdy,'diff(z,y),%)`;

(%o14)

$$2z \left(\frac{d^2}{dy^2} z \right) + \frac{2y^2}{z^2} + 2 = 0$$

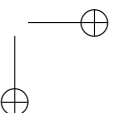
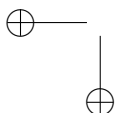
(%i15) `solve(%, 'diff(z,y,2))`;

(%o15)

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} z = -\frac{z^2 + y^2}{z^3} \right]$$

Calculamos z_{xy} derivando la ecuación primero con respecto a y y luego con respecto a x :

(%i20) `diff(ec,x,1,y,1)`;



(%o20)

$$2 \left(\frac{d}{dx} z \right) \left(\frac{d}{dy} z \right) + 2z \left(\frac{d^2}{dx dy} z \right) = 0$$

(%i21) subst(dzdy,'diff(z,y),%);

(%o21)

$$2z \left(\frac{d^2}{dx dy} z \right) - \frac{2y \left(\frac{d}{dx} z \right)}{z} = 0$$

(%i22) subst(dzdx,'diff(z,x),%);

(%o22)

$$2z \left(\frac{d^2}{dx dy} z \right) + \frac{2xy}{z^2} = 0$$

(%i23) solve(%,'diff(z,x,1,y,1));

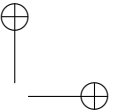
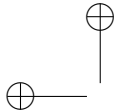
(%o23)

$$\left[\frac{d^2}{dx dy} z = -\frac{xy}{z^3} \right]$$



Ejercicios

1. (Larson-Holester) Calcula la recta tangente a la curva kappa dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
2. Calcula las derivadas y' , y'' , y''' donde $x^2 + xy + y^2 = 3$.
3. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $z^3 - 3xyz = a^3$, donde a es una constante no negativa.
4. Calcula $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ si $x + y + t = 0$, $x^2 + y^2 + t^2 = 1$.
5. En ocasiones la presión P , la temperatura T y el volumen V de un gas son elementos que se relacionan entre sí. Supongamos que la relación viene dada



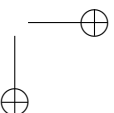
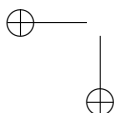
por la ecuación $F(P, T, V) = 0$, donde F es una función de tres variables, con condiciones de diferenciabilidad suficientes.

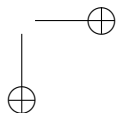
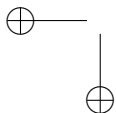
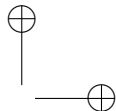
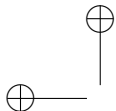
Demuestra la regla cíclica:

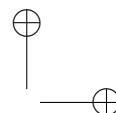
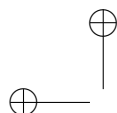
$$\frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial P} = -1.$$

Para ello:

- Para calcular $\frac{\partial P}{\partial T}$, considera que P es función implícita de las otras dos variables T y V , $P = P(T, V)$ y por tanto $F(P(T, V), T, V) = 0$ y deriva toda la ecuación respecto de T . Guarda la derivada en una variable que se llame $dPdT$.
- Para calcular $\frac{\partial T}{\partial V}$, considera $T(P, V)$, es decir, $F(P, T(P, V), V) = 0$ y deriva respecto de V . Guarda la derivada en una variable que se llame $dTdV$.
- Para calcular $\frac{\partial V}{\partial P}$, considera $V(P, T)$, es decir, $F(P, T, V(P, T)) = 0$ y deriva respecto de P . Guarda la derivada en una variable que se llame $dVdP$.
- Por último, verifica que se cumple la regla multiplicando las derivadas que has guardado.

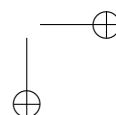
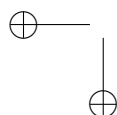


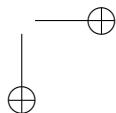
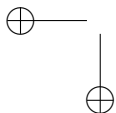
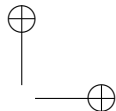
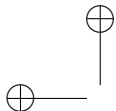


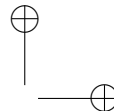
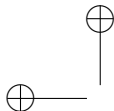


Parte VI

Ecuaciones diferenciales ordinarias







11

Comprobando soluciones de ecuaciones diferenciales

Contenidos

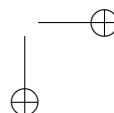
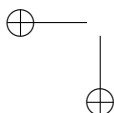


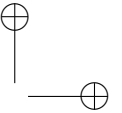
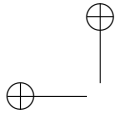
1. Soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas e implícitas.
2. Problemas de contorno y de valores iniciales de primer y segundo orden.
3. Teorema de existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy.

En esta práctica comprobamos con ejemplos que una función determinada es solución de una ecuación diferencial ordinaria, tanto si estas funciones vienen dadas de forma explícita o implícita. Comprobamos las soluciones de problemas de valores iniciales de primer y segundo orden. Por último, resolviendo el sistema algebraico que verifican las constantes de la solución general de la ecuación de un problema de contorno, comprobamos con ejemplos que este problema puede tener una única solución, infinitas o ninguna.

11.1 Soluciones explícitas

Comprobamos que una función determinada es solución explícita de una ecuación diferencial ordinaria.





Ejemplo: La función $y = \frac{2}{2+x}$ es solución explícita de la ecuación diferencial $x y' + y - y^2 = 0$ pues la verifica idénticamente:

```
(%i3) y(x):=2/(2+x)$  
(%i4) ratsimp(x*diff(y(x),x)+y(x)-y(x)^2);  
(%o4)  
0
```

```
(%i5) kill(y)$
```

Ejemplo: Comprobamos que la función $P(t) = \frac{ace^{at}}{1+bce^{at}}$, donde a, b, c son constantes, es solución de la ecuación $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$.

```
(%i15) P(t):=(a*c*e^(a*t))/(1+b*c*e^(a*t));  
(%o15)
```

$$P(t) := \frac{ace^{at}}{1+bce^{at}}$$

```
(%i16) diff(P(t),t)=P(t)*(a-b*P(t));  
(%o16)
```

$$\frac{a^2ce^{at}}{bce^{at}+1} - \frac{a^2bc^2e^{2at}}{(bce^{at}+1)^2} = \frac{ace^{at} \left(a - \frac{abce^{at}}{bce^{at}+1} \right)}{bce^{at}+1}$$

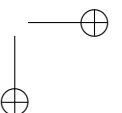
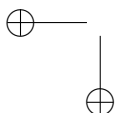
```
(%i17) ratsimp(%);  
(%o17)
```

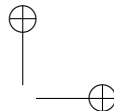
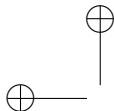
$$\frac{a^2ce^{at}}{b^2c^2e^{2at}+2bce^{at}+1} = \frac{a^2ce^{at}}{b^2c^2e^{2at}+2bce^{at}+1}$$

Claramente se ve que es igual. Una forma más rápida es usando la orden `is`:

```
(%i18) is(ratsimp(diff(P(t),t)=P(t)*(a-b*P(t))));  
(%o18)
```

true





Ejemplo: Comprobamos que la familia uniparamétrica de funciones $y = 1 + ce^{-x}$, es solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' + y = 1$:

```
(%i1) y(x):=1+c*%e^(-x)$  
(%i2) is(ratsimp(diff(y(x),x)+y(x)=1));  
(%o2)  
  
true
```

Para representar gráficamente algunas soluciones particulares, podemos hacer una lista dando algunos valores a la constante c .

Generamos una lista que llamamos `soluciones` de soluciones con valores de $c = -3, -2, 0, 1, 2, 3$:

```
(%i14) soluciones:makelist(1+c*\%e^(-x),c,-3,3);  
(%o14)  
  
[1-3e^-x, 1-2e^-x, 1-e^-x, 1, e^-x+1, 2e^-x+1, 3e^-x+1]
```

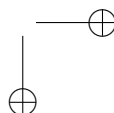
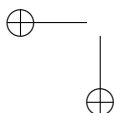
Para representarlas en un sólo gráfico, podemos usar la opción `plot2d`.

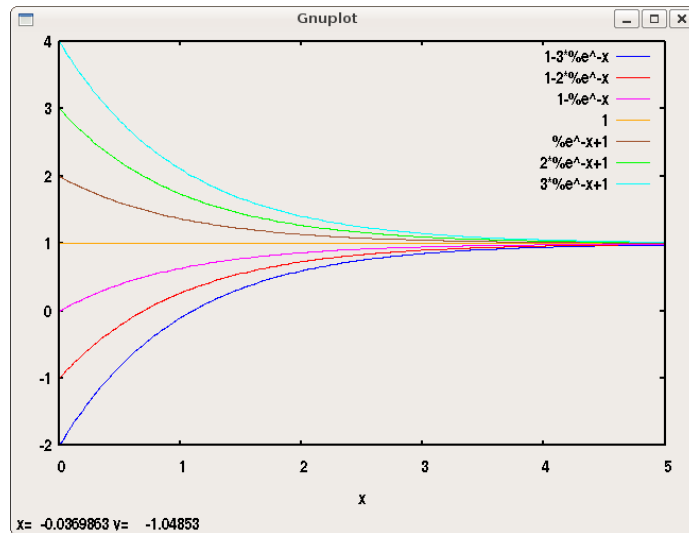
wxMaxima

*Para acceder a esta función, wxMaxima nos ofrece una interfaz muy atractiva, a la que se puede acceder a través del menú **Gráficos** → **Gráficos2D**... wxMaxima nos ofrecerá una ventana con varias opciones.*



Representamos la lista para $x \in [-3, 3]$.





Ejemplo: Comprobamos que $y(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$ es solución explícita de la ecuación de segundo orden $y'' + 16y = 0$:

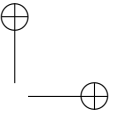
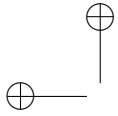
```
(%i3) kill(y)$
(%i4) y(t):=c1*cos(4*t)+c2*sin(4*t)$
(%i5) is(ratsimp(diff(y(t),t,2)+16*y(t))=0);
(%o5)
true
```

11.2 Soluciones implícitas

Si la solución viene dada de forma implícita, debemos usar la orden `depends` para declarar las dependencias de las variables.

Ejemplo: La ecuación $x^2 + y^2 = 25$, siendo y función implícita de x , es solución implícita de la ecuación $y y' + x = 0$.

```
(%i16) kill(y,x)$
(%i17) depends(y,x)$
```



```
(%i18) diff(x^2+y^2=25,x)$  
(%i19) solve(% ,diff(y,x));  
(%o19)
```

$$\left[\frac{d}{dx} y = -\frac{x}{y} \right]$$

```
(%i20) ec:y*'diff(y,x)+x=0$  
(%i21) solve(ec,'diff(y,x));  
(%o21)
```

$$\left[\frac{d}{dx} y = -\frac{x}{y} \right]$$

El caso anterior es muy simple y quizás no era necesario despejar y' para comprobar de que se trataba de la misma ecuación diferencial. Veamos un ejemplo más.

Ejemplo: Comprobamos que $e^{xy} + y = x - 1$ es solución implícita de la ecuación

$$y' = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}.$$

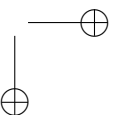
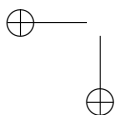
```
(%i8) kill(x,y)$  
(%i9) depends(y,x)$  
(%i10) ec:%e^(x*y)+y=x-1$  
(%i11) diff(ec,x);  
(%o11)
```

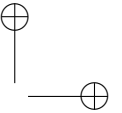
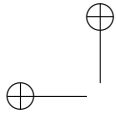
$$e^{xy} \left(x \left(\frac{d}{dx} y \right) + y \right) + \frac{d}{dx} y = 1$$

```
(%i12) solve(% ,diff(y,x));  
(%o12)
```

$$\left[\frac{d}{dx} y = -\frac{y e^{xy} - 1}{x e^{xy} + 1} \right]$$

```
(%i13) ec2:-(y*e^(x*y)-1)/(x*e^(x*y)+1)=(%e^(-x*y)-y)/(e^(-x*y)+x);
```





```
(%o13)
```

$$\frac{1 - y e^{xy}}{x e^{xy} + 1} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$$

```
(%i14) ratsimp(%);
```

```
(%o14)
```

$$-\frac{y e^{xy} - 1}{x e^{xy} + 1} = -\frac{y e^{xy} - 1}{x e^{xy} + 1}$$

11.3 Soluciones de un problema de Cauchy

Un problema de Cauchy o problema de valor inicial de primer orden es un problema en el que hay que resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden sujeta a la condición adicional $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El teorema de existencia y unicidad nos da condiciones suficientes para la unicidad de un problema de valores iniciales. Pero un problema de este tipo puede tener más de una solución.

Ejemplo: Sea el problema

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

En este problema no se cumple el teorema de existencia y unicidad de solución pues la derivada

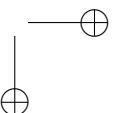
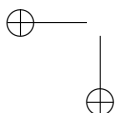
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{1/3}},$$

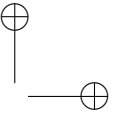
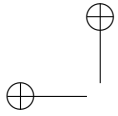
en $y = 0$ se hace infinita.

Comprobamos que la función $y = \frac{x^3}{8}$ es solución del problema.

```
(%i4) kill(all)$
```

```
(%i1) y(x) := (x)^3/8$
```





```
(%i2) is(diff(y(x),x)=3/2*y(x)^(2/3));  
(%o2)  
  
true
```

La condición inicial también la verifica trivialmente.

```
(%i3) is(y(0)=0);  
(%o3)  
  
true
```

Además la función $y = 0$ es claramente una solución del problema. Por tanto este problema de Cauchy tiene por lo menos dos soluciones distintas.

Ejemplo: El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{2/3} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

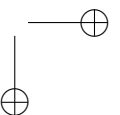
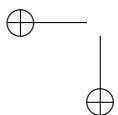
tiene una única solución pues

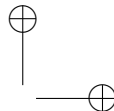
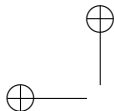
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{1/3}}$$

no se anula para $y = 1$. La función $y = \frac{(x+2)^3}{8}$ es la solución del problema. Verifica la ecuación

```
(%i6) kill(all)$  
(%i1) y(x):=(x+2)^3/8$  
(%i2) is(diff(y(x),x)=3/2*y(x)^(2/3));  
(%o2)  
  
true
```

Además verifica la condición inicial:





```
(%i3) is(y(0)=1);  
(%o3)  
  
true
```

Un problema de valores iniciales de segundo orden es un problema en el que hay que resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden sujeta a las condiciones adicionales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

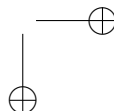
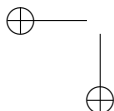
Ejemplo: Comprobamos que la función $y = \sqrt{2}\sin(2x) - 1/2$ es solución del problema de valores iniciales

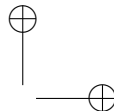
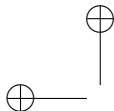
$$\begin{cases} y'' + 4y = -2 \\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \end{cases}$$

```
(%i6) kill(all)$  
(%i1) y(x):=sqrt(2)*sin(2*x)-1/2$  
(%i2) is(ratsimp(diff(y(x),x,2)+4*y(x))=-2);  
(%o2)  
  
true
```

```
(%i3) is(y(%pi/8)=1/2);  
(%o3)  
  
true
```

```
(%i4) diff(y(x),x)$  
(%i5) %,x:%pi/8;  
(%o5)  
  
2
```





11.4 Soluciones de un problema de contorno

Un problema de contorno para una ecuación diferencial de segundo orden es un problema en el que hay que resolver una ecuación diferencial de segundo orden, pero además las soluciones deben de verificar las condiciones de frontera $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Este problema puede tener solución, no tenerla o tener infinitas, como ocurre en los siguientes ejemplos.

Ejemplo: El problema

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi/6) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución.

```
(%i3) kill(all)$
(%i1) y(t):=c1*cos(4*t)+c2*sin(4*t)$
(%i2) solve([y(0)=0,y(%pi/6)=0],[c1,c2]);
(%o2)
[[c1 = 0, c2 = 0]]
```

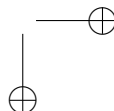
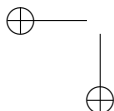
Geoméricamente la solución del problema $y = 0$ una curva solución que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(0, \pi/6)$.

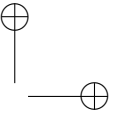
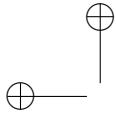
Ejemplo: El problema

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi/4) = 0, \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones.

```
(%i49) kill(y)$
(%i50) y(t):=c1*cos(4*t)+c2*sin(4*t)$
(%i51) solve([y(0)=0,y(%pi/4)=0],[c1,c2]);
```





Dependent equations eliminated: (2)

```
(%o51)
```

```
[[c1 = 0, c2 = %r3]]
```

```
(%i52) y(t), c1=0;
```

```
(%o52)
```

```
c2 sin(4t)
```

Creamos una lista con algunas de las soluciones anteriores. En concreto le damos valores a la constante $c = -1, 0, 1/2, 1/4, 1$.

```
(%i34) sol: makelist(c2*sin(4*t), c2, [-1, 0, 1/2, 1/4, 1]);
```

```
(%o34)
```

```

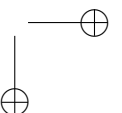
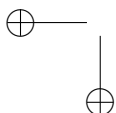
$$\left[ -\sin(4t), 0, \frac{\sin(4t)}{2}, \frac{\sin(4t)}{4}, \sin(4t) \right]$$

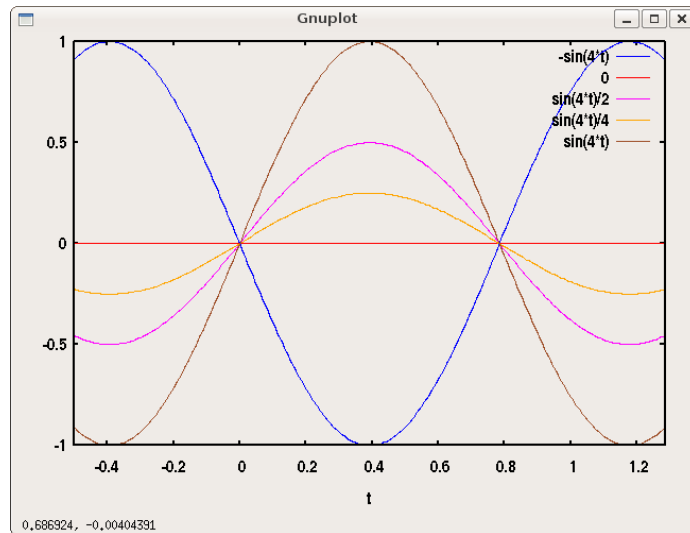
```

Geoméricamente, las soluciones del problema son curvas solución de la ecuación que pasan por los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$. Representamos las curvas en el intervalo $[-1/2, \pi/2 + 1/2]$.

```
(%i55) plot2d(sol, [t, -1/2, %pi/4+1/2]);
```

```
(%o55)
```



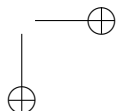
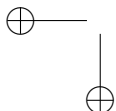
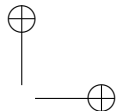
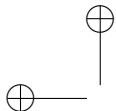


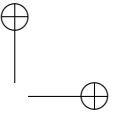
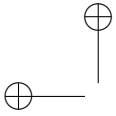
Ejemplo: Si el problema es el siguiente

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, \end{cases}$$

no tiene solución.

```
(%i56) solve([y(0)=0,y(%pi /2)=1],[c1,c2]);
Inconsistent equations: (2)
- an error. To debug this try debugmode(true);
```





Integración directa y variables separables

Maxima se puede utilizar no sólo para resolver ciertas ecuaciones diferenciales, también para aplicar los métodos vistos en clase y así comprobar la resolución paso a paso.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$y' = \log x + 1 - x^2 + \sqrt{x+2}$$

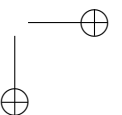
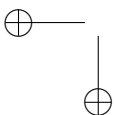
Estamos en el caso más sencillo, lo podemos resolver por integración directa. Esto se hace con la orden `integrate`:

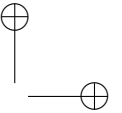
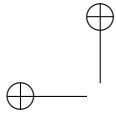
```
(%i1) integrate(log(x)+1-x^2+sqrt(x+2),x);  
(%o1)
```

$$x \log x + \frac{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}$$

Observa que al final de `integrate` hemos indicado respecto de qué variable estábamos integrando, y que la constante de integración no aparece (así que cuando sea necesaria la tendremos que incorporar a mano). Después podemos dibujar la solución, etc.

```
(%i2) plot2d(%,[x,0,3]);  
(%o2)
```





El Maxima tiene varias órdenes para la resolución directa de ecuaciones diferenciales, una de ellas es “edo2”. Si resuelves la ecuación anterior con edo2 observarás que en este caso no hay, esencialmente, ninguna diferencia:

```
(%i3) ode2('diff(y,x)=log(x)+1-x^2+sqrt(x+2),y,x);  
(%o3)
```

$$y = x \log x + \frac{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} + \%c$$

En este caso sí que aparece el parámetro; si te dan alguna condición inicial puedes calcularlo mediante la orden “ic1”:

```
(%i6) ic1(%o3,x=1,y=1);  
Argument to 'first' is empty.  
#0: solve1(eq=3,y=%c)(ode2.mac line 70)  
#1: ic1(soln=3,xc=x = 1,yc=y = 1)(ode2.mac line 300)  
– an error. To debug this try debugmode(true);
```

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

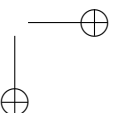
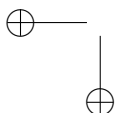
$$x \frac{dy}{dx} + y = 1$$

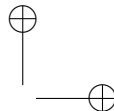
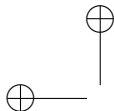
Ésta no podemos resolverla por integración directa (no es posible despejar y), pero sí es sencillo transformarla en una de variables separadas haciendo las transformaciones apropiadas:

$$\frac{1}{1-y} dy = \frac{1}{x} dx$$

y ahora con el Maxima integramos ambos miembros

```
(%i7) integrate(1/(1-y),y);  
(%o7)  
– log(1 - y)
```





```
(%i8) integrate(1/x,x);
```

```
(%o8)
```

$\log x$

A continuación podemos escribir la solución igualando ambos resultados y añadiendo la constante de integración en uno de los miembros (la llamaremos “C”) Al usar solve de la siguiente manera, el Maxima despejará la función y si es posible:

```
(%i9) solve(integrate(1/(1-y),y)=integrate(1/x,x)+C,y);
```

```
(%o9)
```

$$\left[y = \frac{e^{-C} (x e^C - 1)}{x} \right]$$

Para terminar observa que escribir $-e^{-C}$ es (casi) lo mismo que escribir C , se trata de una constante al fin y al cabo; pero el programa no hace esa simplificación por sí solo. En este caso funciona mejor la resolución directa con ode2:

```
(%i10) ode2(x*'diff(y,x)+y=1,y,x);
```

```
(%o10)
```

$$y = \frac{x + \%c}{x}$$

Ejercicio 1. Comprueba que las soluciones que hemos obtenido son correctas sustituyendo en la ecuación diferencial.

Ejercicio 2. Resuelve mediante separación de variables la ecuación

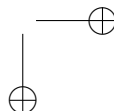
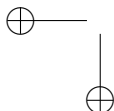
$$x^2 \frac{dy}{dx} - y = 1$$

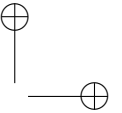
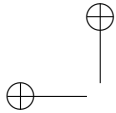
como en el ejemplo anterior. ¿Obtienes la misma solución por pasos y con ode2?

(La solución es $y(x) = -1 + C e^{-1/x}$)

Ejemplo 3. También podemos resolver ecuaciones diferenciales que tengan soluciones implícitas. Veámoslo resolviendo

$$yy' + x = 0$$





. Esta ecuación es de nuevo de variables separables, luego seguimos los pasos del ejemplo anterior. Es, decir, en primer lugar reescribimos la ecuación:

$$yy' + x = 0 \implies ydy = -x dx$$

Integramos ambos miembros e igualamos (añadiendo la constante),

```
(%i11) integrate(y,y);  
(%o11)
```

$$\frac{y^2}{2}$$

```
(%i12) integrate(-x,x);  
(%o12)
```

$$-\frac{x^2}{2}$$

```
(%i13) ecu:%o9=%o10+C;  
(%o13)
```

$$9 = C + 10$$

Por último, podemos obtener las soluciones explícitas sin más que usar “solve”

```
(%i14) solve(ecu,y);  
(%o14)
```

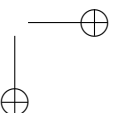
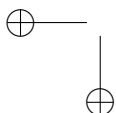
□

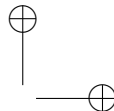
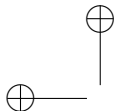
Observa que ode2 da exactamente los mismos resultados en este caso:

```
(%i15) ode2(y*'diff(y,x)+x=0,y,x);  
(%o15)
```

$$-\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \%c$$

```
(%i16) solve(%o13,y);
```





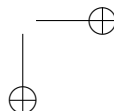
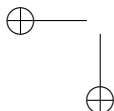
(%o16)

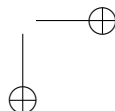
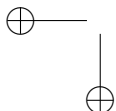
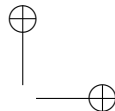
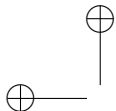
□

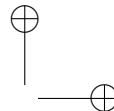
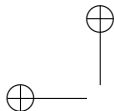
Ejercicio 3. Resuelve la ecuación mediante ode2

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

tomando como constante el valor 3, y representa las soluciones entre -2 y 2 utilizando plot2d.







Ecuaciones homogéneas y exactas

Ejemplo 1. También podemos usar el programa para comprobar si una ecuación es homogénea o exacta. Veamos ambas propiedades en una misma ecuación, pero estudiando cada una de ellas por separado.

¿Es homogénea o exacta la ecuación

$$(x^2 + 2xy) = -(x^3y - 3xy^3)y'?$$

Para esto primero la escribimos en la forma diferencial:

$$(x^2 + 2xy)dx + (x^3y - 3xy^3)dy = 0$$

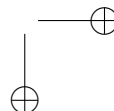
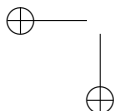
Llamamos a los coeficientes $M(x, y)$ y $P(x, y)$ y comprobamos si $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ y $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, es decir, si son homogéneas del mismo grado.

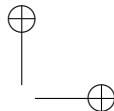
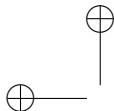
Observa que el resultado ha sido t^2 y t^4 , es decir: M es homogénea de grado 2 y P es homogénea de grado 4. Como son homogéneas pero NO del mismo grado, la ecuación diferencial no es homogénea.

Para ver si es exacta tendremos que calcular $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial x}$ y comprobar si son iguales. Veámoslo:

Será exacta si el programa da la respuesta “0” y no exacta en cualquier otro caso (por ejemplo aquí). Un caso excepcional es que la expresión sea demasiado complicada de simplificar para el Maxima, entonces podríamos creer que una ecuación exacta no lo es.

Ejercicio 4. En cada una de estas ecuaciones di si son exactas, homogéneas, ambas cosas o ninguna:





a) $(y^2 + yx)dx + (2xy + x^2/2)dy = 0$ (Sol: exacta y homogénea)

b) $\frac{y}{x} + y' \log(x) = 0$ (Sol: exacta, no homogénea)

c) $xe^{y/x}dx + ydy = 0$ (Sol: homogénea, no exacta)

Ejercicio 5. Del ejercicio anterior, resuelve la ecuación del apartado b) añadiendo la condición inicial $y(e) = e^2$

Hemos visto cómo reconocer si una ecuación es exacta u homogénea. Ahora vamos a resolver ecuaciones de esos dos tipos.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación exacta

$$(e^{2y} - y \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)dy = 0$$

Como ya nos dicen que es exacta no es necesario hacer la comprobación de las derivadas. Para empezar vamos a llamar $m(x, y)$ y $n(x, y)$ a los coeficientes de dx y dy respectivamente (en la teoría eran M y N), y a continuación la intentamos resolver con ode2:

El programa devuelve una solución implícita. Vamos a ver qué ocurre si lo hacemos siguiendo los pasos vistos en la teoría.

En primer lugar calculamos $\int M(x, y)dx$ y al resultado lo llamamos (por ejemplo) u :

A continuación resolvemos la EDO $g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}$, como se vio en teoría esto puede hacerse por integración directa:

Por último, la solución será, en forma implícita, $g(y) + u(x, y) = C$

Observa que es esencialmente la misma solución obtenida con ode2.

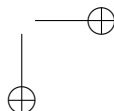
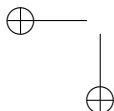
Ejercicio 1.

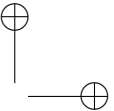
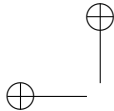
1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial exacta (no es necesario que compruebes que lo es) sin utilizar ode2:

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0$$

2. Para resolver la ecuación

$$6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$$





multiplica por el factor integrante $\mu(x, y) = y^2$ y resuelve la exacta que se obtiene, sin utilizar ode2.

Del mismo modo que con las exactas, podemos resolver las homogéneas reproduciendo el método dado en teoría. En este caso haremos ligeras modificaciones para evitar el engorro de usar los diferenciales con el Maxima. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación homogénea

$$(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$$

Como ya nos dicen que es homogénea no es necesario comprobarlo (aunque está a la vista que ambos coeficientes son de grado dos). Reescribimos la ecuación utilizando $y'(x)$ en lugar de los diferenciales, quedando $y' = \frac{y^2 + yx}{x^2}$:

A continuación hacemos la sustitución, típica de las homogéneas, $y(x) = u(x)x$ y simplificamos:

La ecuación resultante es $(u * x)' = u^2 + u$. Separemos variables (a mano), sabiendo que $(ux)' = u'x + u$. De ahí llegamos a $u^2 = xu'$, con lo que (recuerda que $u' = \frac{du}{dx}$) nos queda $\frac{1}{u^2}du = \frac{1}{x}dx$ y resolvemos mediante integración de cada miembro:

Para terminar deshacemos el cambio de variable, que era $y = u/x$, y despejamos y :

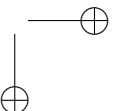
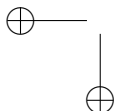
Podríamos comprobar el resultado utilizando ode2. Veámoslo:

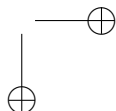
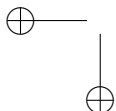
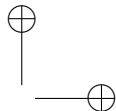
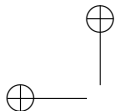
Observa que las salidas %o17 y %o19 son en realidad la misma función.

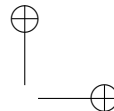
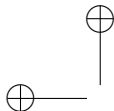
Ejercicio 2. Resuelve la ecuación diferencial homogénea

$$(x^2y + y^3)dx - y^2xdy = 0$$

sin utilizar ode2.







Ecuaciones Lineales

Para resolver las lineales de primer grado vamos a utilizar el método del factor integrante $e^{\int p(x)dx}$, que nos lleva a una exacta.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación lineal

$$xy' = x(\cos x)y - x \cos x$$

En primer lugar, para poder aplicar el método necesitamos que el coeficiente de y' sea igual a 1. Para esto dejamos tan sólo el término independiente (en este caso, $-x \cos x$) en el miembro de la derecha y a continuación dividimos toda la ecuación por dicho coeficiente:

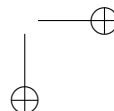
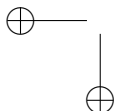
Ahora reconocemos nuestro $p(x)$. Es (como siempre) el coeficiente de y , en este caso $-\cos x$. Debemos multiplicar toda la ecuación recién obtenida por $e^{\int p(x)dx}$ para llegar a una exacta.

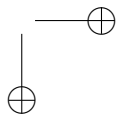
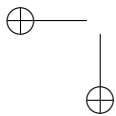
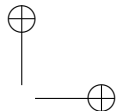
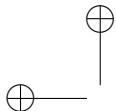
Y para terminar repetimos todo el proceso realizado con las exactas, teniendo en cuenta quiénes son nuestros M y N ahora:

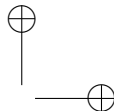
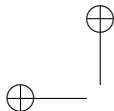
Ejercicio 3. Resuelve la ecuación diferencial lineal

$$y' = (\sin x)y - \sin x$$

mediante el factor integrante $e^{\int p(x)dx}$. Compruébala utilizando ode2.







Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes

Vamos a resolver ecuaciones diferenciales de orden superior y con coeficientes constantes.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación homogénea

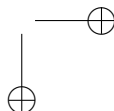
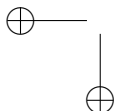
$$y^{(5)} - 7y^{(4)} + 14y''' + 14y'' - 47y' - 39y = 0$$

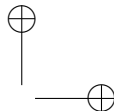
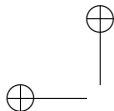
Sabemos que se trata tan sólo de escribir el “polinomio característico” correspondiente a sustituir las derivadas de y por potencias de cierta variable ‘ m ’ y hallar las raíces correspondientes:

Y a continuación escribir la solución en función de si dichas raíces son reales simples, reales múltiples o complejas conjugadas. En este caso tenemos el par de conjugadas $m = 3 \pm 2i$ y las reales $m = 3$ y $m = -1$, pero no está claro si estas raíces reales son simples o dobles. Para ello habrá que ir un poco más allá y pedir a Maxima que nos factorice el polinomio:

Ahora sí está claro que $m = -1$ es doble y $m = 3$ es simple. Por lo tanto, la solución de la ecuación es $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 e^{3x} \cos(2x) + C_5 e^{3x} \sin(2x)$, es decir

Actualmente Maxima está muy limitado para resolver por sí sólo ecuaciones diferenciales de orden superior. Así que nos contentaremos con comprobar la solución obtenida.





Ejercicio 1. Resuelve la ecuación homogénea $y''' - 3y' + 2y = 0$ y comprueba la solución.

Ejercicio 2. Resuelve la ecuación homogénea $y''' - y'' - 4y = 0$ y comprueba la solución.

Ahora vamos a resolver una ecuación no homogénea mediante el método de variación de parámetros. Este método es muy simple de usar con el Maxima pues básicamente, una vez obtenido el sistema fundamental de soluciones $\{y_1, \dots, y_n\}$, se basa en resolver la siguiente ecuación lineal para el caso de orden 2,

$$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0$$

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = g(x)$$

y para el caso de orden 3,

$$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + C'_3(x)y_3 = 0$$

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C'_3(x)y'_3 = 0$$

$$C'_1(x)y''_1 + C'_2(x)y''_2 + C'_3(x)y''_3 = g(x)$$

y así sucesivamente, donde las incógnitas son las funciones $C_i(x)$, que finalmente se hallarán mediante integración. Para esto utilizaremos la instrucción del Maxima “linsolve” (en la teoría se verá una forma diferente de hacerlo, más “humana”).

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

En primer lugar repetimos los pasos del ejemplo 1 para resolver la ecuación homogénea asociada, pero además pondremos nombre a los miembros del s.f.s. y al término independiente:

y finalmente hallamos $C_1(x)$ y $C_2(x)$

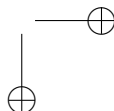
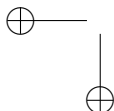
La solución particular es $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ y la solución final será entonces $y = y_c + y_p$:

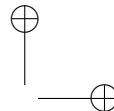
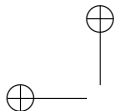
Podemos comprobarlo, para finalizar:

Ejercicio 3. Resuelve la ecuación $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log(x)$

Ejercicio 4. Resuelve la ecuación $y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x}$

Ejercicio 5. Resuelve la ecuación $y'' + 5y' + 4y = 7e^{4x}$





Movimientos vibratorios

Vamos a ver los distintos tipos de movimientos vibratorios que existen, con sus correspondientes gráficas.

Movimiento armónico simple

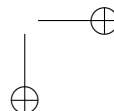
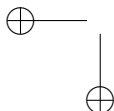
Es un movimiento vibratorio no amortiguado y no forzado, aunque se le suele llamar m.a.s. Es importante tener claro que modeliza un objeto que se mueve de forma periódica sujeto a un muelle o resorte. Viene dado por una ecuación diferencial del tipo

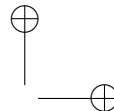
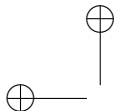
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

donde k es la constante de proporcionalidad del muelle y m es la masa del objeto que se mueve. La ecuación viene acompañada normalmente de las condiciones iniciales, es decir, los valores de $x(0)$ y $x'(0)$. Es importante tener en cuenta el cambio en la notación, en estas ecuaciones diferenciales la “ x ” juega el papel que jugaba la “ y ” y a su vez la “ t ” juega el papel que jugaba la “ x ”. Esto se debe a que t indica el tiempo, y x el alargamiento del resorte, que está en función de t . La posición de equilibrio es aquella en la que la fuerza ejercida por el cuerpo hacia abajo es igual que la ejercida por el resorte hacia arriba (con nuestra notación esto se indica por $x(0) = 0$).

Veamos qué aspecto tiene la solución de la ecuación para unos valores concretos de las constantes.

Ejemplo 1. Un cuerpo de masa 3 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 4 uds. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 1 uds. por encima de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 2 uds. hacia abajo, calcular la ecuación del movimiento y dibujarla.





En el ejemplo anterior hay que tener en cuenta, para las condiciones iniciales, el signo de la posición y la velocidad. Por encima de la posición de equilibrio x es negativa, y por debajo x es positiva. Del mismo modo, x' es positiva cuando el objeto se mueve hacia abajo y negativa cuando el objeto se mueve hacia arriba.

Ejercicio 1. Un cuerpo de masa 2 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 5 uds. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 3 uds. por debajo de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 4 uds. hacia arriba, calcula la ecuación del movimiento y dibújala en el intervalo $[0, 20]$.

Movimiento vibratorio amortiguado y no forzado

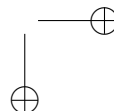
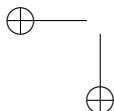
La diferencia con el movimiento anterior es que aquí existe una amortiguación, que es una fuerza que se opone al movimiento y en este modelo se supone proporcional a la velocidad. Así que nuestra ecuación ahora es:

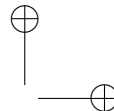
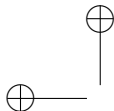
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

donde k y m son como en el m.a.s. y λ es una constante que indica la amortiguación (el 2 que la multiplica tiene una justificación matemática que no es significativa aquí). Existen tres posibles gráficas dependiendo del signo de $\lambda^2 - \frac{k}{m}$. Las vemos en los ejemplos y el ejercicio que siguen. Observa que lo único que cambia con respecto al m.a.s. es la ecuación y la presencia de una nueva constante (λ).

Ejemplo 2. Un cuerpo de masa 3 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 12 uds. Además existe una amortiguación que viene dada por $\lambda = 5/2$. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 1 uds. por debajo de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 1 uds. hacia abajo, calcular la ecuación del movimiento y dibujarla.

Ejemplo 3. Un cuerpo de masa $1/4$ uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 4 uds. Además existe una amortiguación que viene dada por $\lambda = 4$. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 1 uds. por debajo de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 8 uds. hacia arriba, calcular la ecuación del movimiento y dibujarla.





Ejercicio 2. Un cuerpo de masa 1 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 8 uds. Además existe una amortiguación que viene dada por $\lambda = 1$. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 1 uds. por debajo de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 1 uds. hacia abajo, calcula la ecuación del movimiento y dibújala en el intervalo $[0, 9]$. ¿Observas alguna similitud con las gráficas de los ejemplos 2 y 3? (ten en cuenta lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito).

Movimiento vibratorio amortiguado y forzado

Si añadimos al modelo anterior una fuerza externa $F(t)$ resulta el movimiento vibratorio amortiguado y no forzado, cuya ecuación es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

siendo las constantes como en el modelo anterior. Aquí la gráfica puede variar sustancialmente dependiendo de quién sea $F(t)$. Veámoslo.

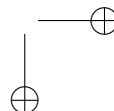
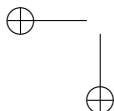
Ejemplo 4. Un cuerpo de masa 1 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 2 uds. Existe una amortiguación que viene dada por $\lambda = 1$. Además se ejerce una fuerza externa que viene dada por $F(t) = 4 \cos t + 2 \sin t$. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 4 uds. por debajo de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 5 uds. hacia arriba, calcular la ecuación del movimiento y dibujarla.

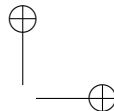
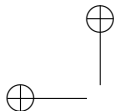
Observa que no es exactamente periódica pero está, en cierto sentido, muy cerca de serlo.

Ejercicio 3. Un cuerpo de masa 1 uds. estira un resorte cuya constante de proporcionalidad es 2 uds. Existe una amortiguación que viene dada por $\lambda = 1$. Además se ejerce una fuerza externa que viene dada por $F(t) = e^{-t} \cos t$. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo está 2 uds. por encima de la posición de equilibrio y va con una velocidad de 5 uds. hacia abajo, calcula la ecuación del movimiento y dibújala en el intervalo $[0, 8]$. ¿Se parece en algo a la gráfica del ejemplo anterior?

Movimiento vibratorio forzado y no amortiguado

Este modelo podría verse como un caso particular del anterior en el que la amortiguación desaparece. Pero tiene una especial importancia porque ilustra los



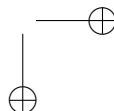
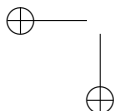


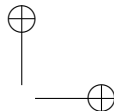
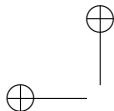
peligros de un sistema con poca o nula amortiguación (por ejemplo, un autobús con los amortiguadores en mal estado). Ahora nuestra ecuación es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

donde las letras indican lo mismo que en los modelos anteriores. El proceso de resolución es análogo, así que no daremos más ejemplos.

Ejercicio 4. En un antiguo avión de pasajeros DC-9 los sistemas de amortiguación de las vibraciones del ala no funcionan. Los motores ejercen una fuerza periódica que se transmite a cada ala y viene dada por $F(t) = \text{Sen}(2t)$. Sabiendo que el ala parte de la posición de equilibrio y su velocidad vertical inicial es de 0 uds., la masa del ala es de 1 uds. y la constante de proporcionalidad es de 4 uds., obtén la ecuación que describe el movimiento del ala y dibújala en el intervalo $[0, 30]$. A largo plazo, ¿qué ocurrirá? (nota: estos aviones dejaron de fabricarse en 1980 y en España dejaron de volar comercialmente en 1991).





Ecuación de Cauchy-Euler

Es una ecuación diferencial ordinaria que tiene una forma específica (la vemos para orden 2):

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

Lo que la caracteriza es que la derivada n -ésima de y siempre va acompañada de la potencia n -ésima de x .

Nosotros aquí resolveremos la correspondiente ecuación homogénea mediante la sustitución $y = x^m$, y a continuación la no homogénea mediante variación de parámetros. Veamos el ejemplo que corresponde a dos raíces reales simples.

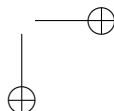
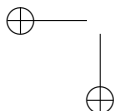
Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^2 y'' - 4xy' + 6y = -8x$.

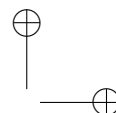
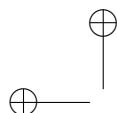
Ponemos nombre a la ecuación homogénea y hacemos la sustitución indicada:

Resolvemos la ecuación

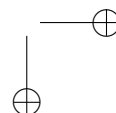
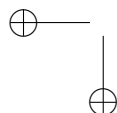
Observemos que $x^m = 0$ es imposible pues x es una variable independiente. Por lo tanto, en este caso se obtienen las raíces reales simples $m = 2$ y $m = 3$. De este modo la solución general de la ecuación homogénea será $y_h = C_1 x^2 + C_2 x^3$. Resolvamos ahora la no homogénea por variación de parámetros, es decir, cambiando los parámetros C_1 y C_2 por variables $C_1(x)$ y $C_2(x)$. Esto se puede hacer, igual que en las EDOs de coeficientes constantes, utilizando el Wronskiano y tomando como término independiente $g(x) = -8x/x^2$ (es preciso normalizar, es decir, dividir $-8x$ por el coeficiente de y'' , que aquí es x^2):

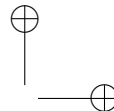
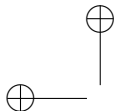
La última línea comprueba que la solución es correcta. Debe devolver siempre el valor 0.





Ejercicio 5. Resuelve la ecuación $9x^2y'' - 3xy' - 12x^2 - 9x = 0$ (observa que no hay término en y' y que $g(x)$ tiene dos sumandos).





18

Campos de direcciones

Contenidos



1. Campo de direcciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Obtendremos el campo de direcciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para tener una idea cualitativa de las soluciones.

Si $y = y(x)$ es solución de la ecuación $y' = f(x, y)$, en cualquier punto (x, y) del plano por donde pase una curva solución, se tiene la pendiente de la recta tangente a ese punto, y es $f(x, y(x))$. Si se representa en cada punto la dirección de la pendiente, se obtiene el campo de direcciones de la ecuación.

Maxima posee un paquete, `plotdf`, que crea un gráfico del campo de direcciones para una ecuación diferencial y un sistema de ecuaciones autónomas de primer orden. Para poder usar las órdenes que están definidas en él, hay que cargarlo previamente:

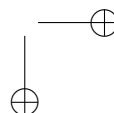
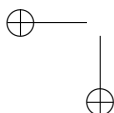
```
(%i1) load("plotdf")$
```

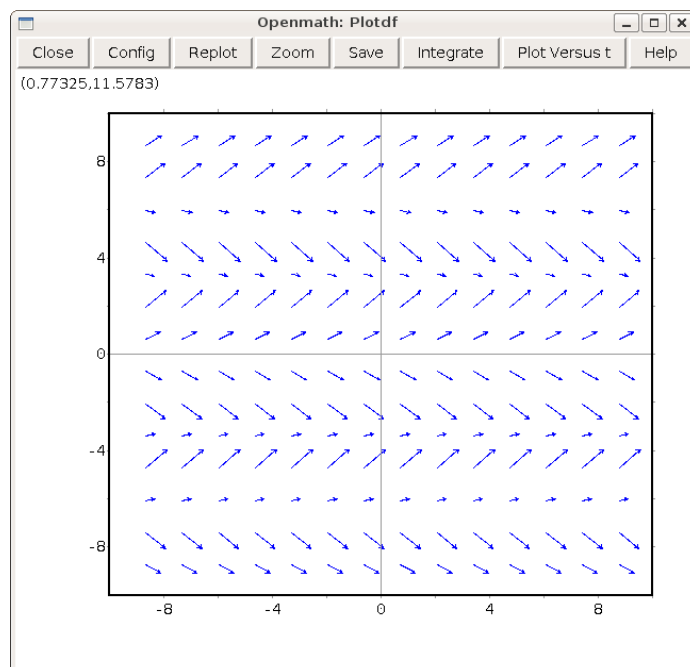
La ecuación debe escribirse en forma normal y usar las variables x e y . Por ejemplo, para crear el campo de direcciones de la ecuación $y' = \sin y$ debemos escribir:

```
(%i2) plotdf(sin(y));
```

Aparece el siguiente gráfico:

145





Para ver la curva integral que pasa por un punto del gráfico, basta hacer clic en ese punto y aparecerá. En la ventana del gráfico aparece un menú.

1. Menú de la ventana del gráfico

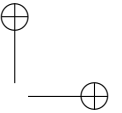
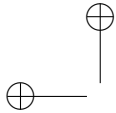
Zoom. Se puede hacer zoom en la región del gráfico pulsando el botón izquierdo del ratón. Si se mantiene pulsada la tecla Shift mientras se hace clic, retrocede al tamaño anterior. Para reanudar el cálculo de las trayectorias cuando se hace clic, selecciona la opción **integrate** del menú.

Config. Se usa para hacer cambios y ajustes con las opciones gráficas que posee el paquete. Una vez hechos los cambios hay que pulsar **Replot** para activarlos.

2. Opciones gráficas

Algunas opciones que aparecen en el menú son:

xfun. Establece una cadena de funciones que dependen de x , separadas por puntos y comas, que pueden ser representadas encima del campo de direcciones.



`xradius`. Es la mitad de la longitud del rango de los valores a representar en la dirección x .

`yradius`. Es la mitad de la longitud del rango de los valores a representar en la dirección y .

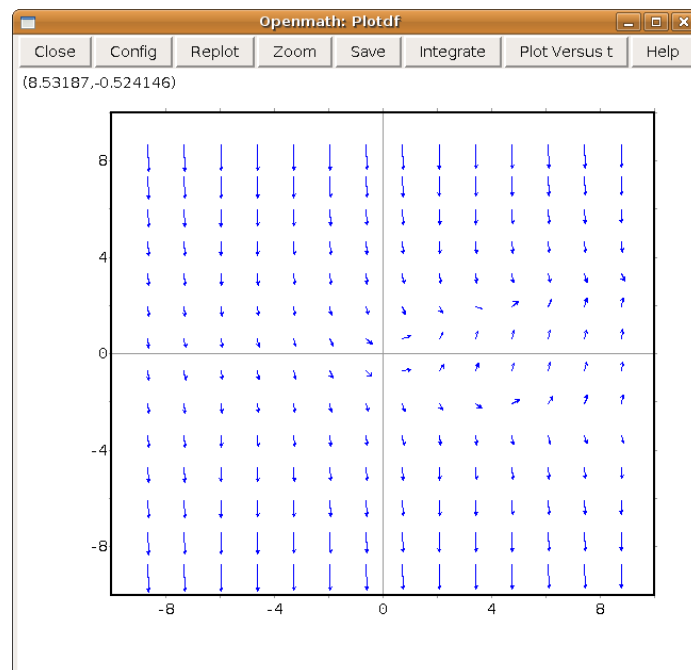
`xcenter`. Es la coordenada x del punto situado en el centro del gráfico

`ycenter`. Es la coordenada y del punto situado en el centro del gráfico.

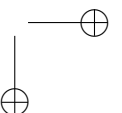
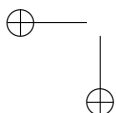
Por ejemplo, estudiamos el campo de direcciones de la ecuación

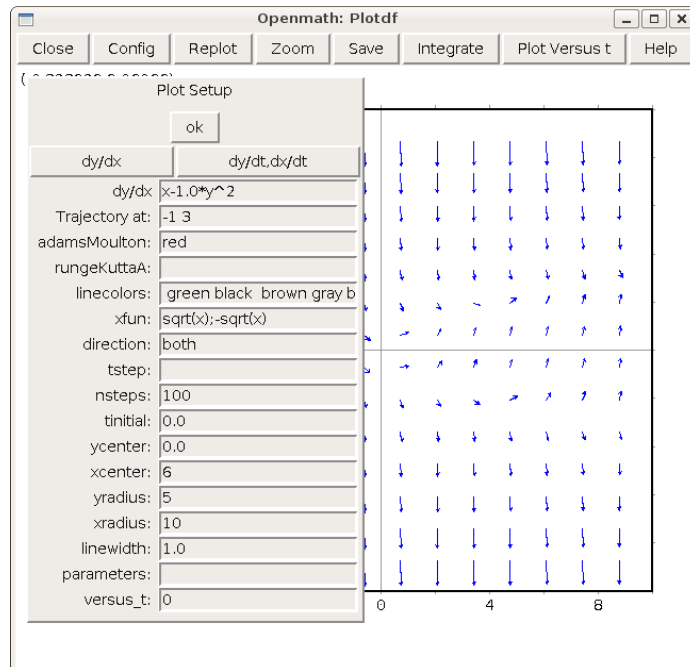
$$y' = x - y^2 :$$

```
(%i3) plotdf(x-y^2);
```

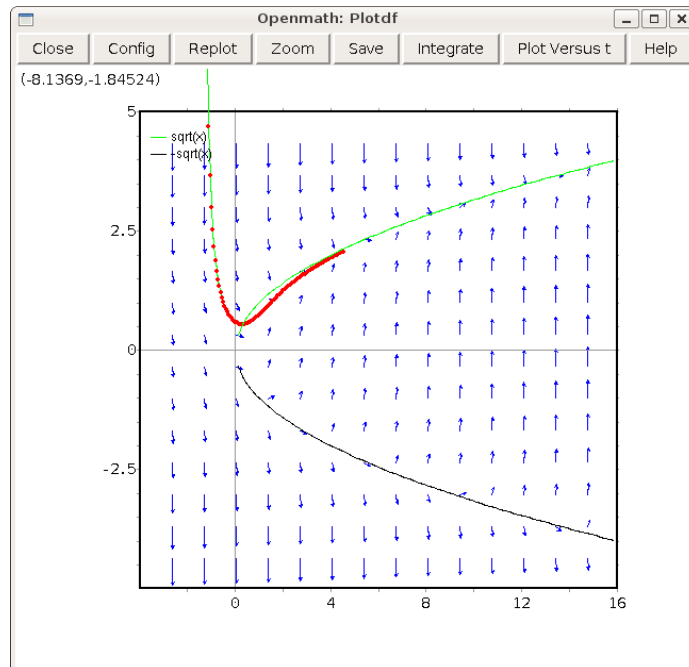


Podemos usar directamente el menú de opciones para representar, por ejemplo, la curva integral que pasa por el punto $(-1, 3)$, con $y \in (-5, 5)$ y centro $(6, 0)$. Además de las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$. Para ello pulsamos `Config` y aparecerá un cuadro en el que introducimos las opciones que queremos, así:





Si pulsamos ok y a continuación Replot aparecerá el gráfico correspondiente:



También podemos escribir las opciones directamente en la misma orden:

```
(%i5)
plotdf(x-y^2,[trajectory_at,-1,3],[xfun,"sqrt(x);-sqrt(x)],[yradius,5],
[xcenter,6]);
```

18.1 Soluciones de equilibrio

Una ecuación diferencial se dice que es *autónoma* si no aparece en ella explícitamente la variable independiente: $y' = f(y)$.

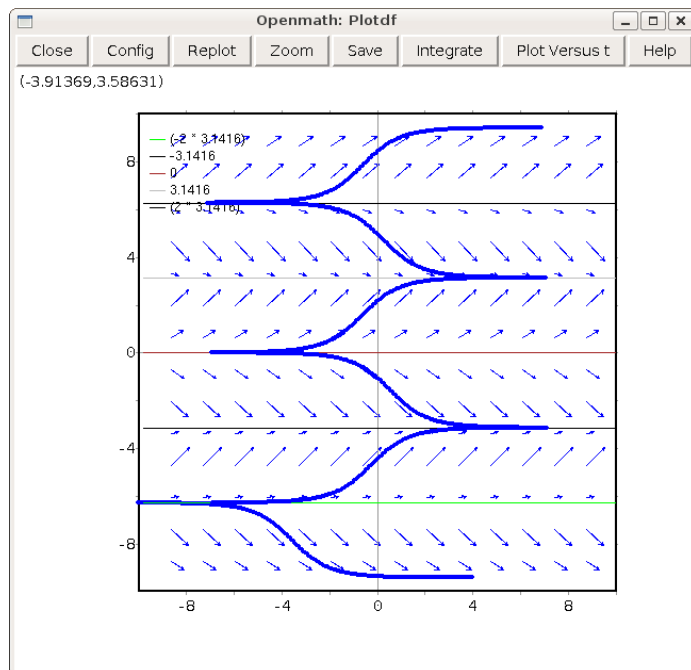
Los *puntos críticos* de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación algebraica $f(y) = 0$.

Estas soluciones, como funciones constantes, son evidentemente soluciones de la ecuación diferencial. Son llamadas *soluciones de equilibrio* y tienen propiedades importantes.

Si suponemos que por cada punto del plano pasa una única solución de la ecuación autónoma, podremos afirmar las siguientes afirmaciones sobre las soluciones de equilibrio:

1. La gráfica de una solución no constante no corta a ninguna solución de equilibrio.
2. Una solución no constante es estrictamente creciente o decreciente.
3. Si la gráfica de una solución no constante está acotada superior o inferiormente (o ambas) por una solución de equilibrio, necesariamente debe tender a ella cuando x tiende a infinito.

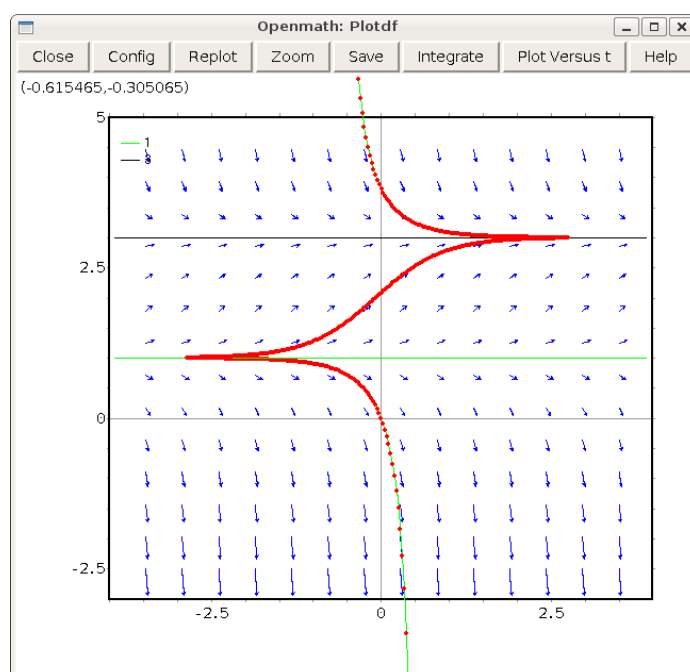
Veamos, por ejemplo, las soluciones de equilibrio de la ecuación autónoma $y' = \sin(y)$ representadas en el campo de direcciones de la ecuación y algunas soluciones no constantes.



Ejemplo: Sea $y' = -(y - 1)(y - 3)$, la ecuación autónoma. Representemos con ayuda de la orden `plotdf` las soluciones de equilibrio ($y = 1$, $y = 3$), junto con

algunas de sus curvas solución no constantes en el campo de direcciones de la ecuación.

```
(%i2) plotdf(-(y-1)*(y-3),[trajectory_at,0,1],[ycenter,1],[xradius,4],[y
```



Veamos ahora dos opciones gráficas que son muy útiles cuando se trata de ecuaciones con parámetros.

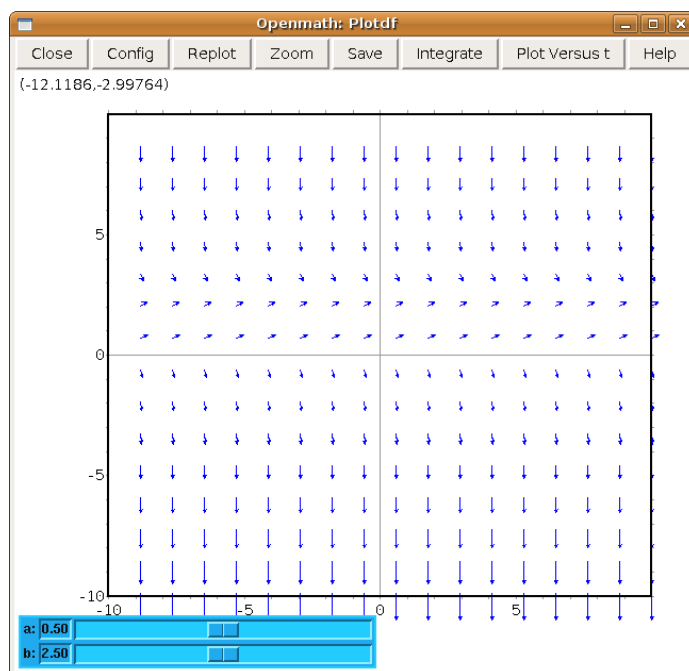
La opción `sliders` establece una lista de parámetros, que cambiarán interactivamente utilizando barras de deslizamiento y los rangos de variación de dichos parámetros.

La opción `parameters` establece una lista de parámetros con valores numéricos, que son utilizados en la definición de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Sea la ecuación autónoma $y' = k(y - a)(y - b)$.

El parámetro “fijo” será $k = -1$ y para a y b tendremos dos barras de deslizamiento respectivamente:

```
(%i3) plotdf(k*(y-a)*(y-b),[parameters,"k=-1"],[sliders,"a=0:1,b=2:3"]);
```

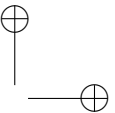
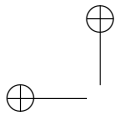


Ejercicios

1. *Isoclinas.* Otro método gráfico para conocer el comportamiento cualitativo de las soluciones de una ecuación, es el método de las isoclinas (igual inclinación o pendiente). Una isoclina de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es una curva de la forma $f(x, y) = c$. Nos permite localizar campos de direcciones con la misma inclinación.

Representa el campo de direcciones de la ecuación $y' = -y$ junto con las isoclinas $-y = c$ para $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y algunas curvas solución en $[-3, 3]$.

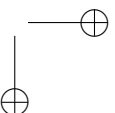
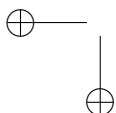
2. *Curvas de inflexión.* Se puede obtener información sobre la concavidad de las curvas solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ sin resolverla. Para ello, derivamos la ecuación implícitamente y obtenemos y'' . Entonces, en las regiones del plano donde $y'' > 0$, las curvas son cóncavas hacia arriba y en las que $y'' < 0$, cóncavas hacia abajo.

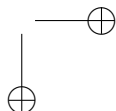
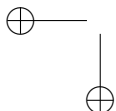
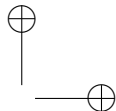
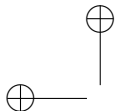


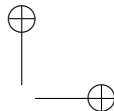
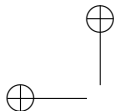
Representa el campo de direcciones de la ecuación

$$y' = -\operatorname{sen}(x)y + \cos(x)$$

junto con algunas curvas de inflexión.







Funciones especiales

Contenidos



1. Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel.

Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes variables, como la ecuación de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y,$$

la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2ny,$$

o la ecuación de Legendre:

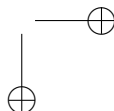
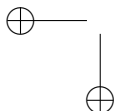
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y,$$

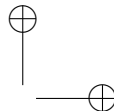
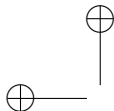
tienen soluciones particulares muy importantes en ciencias aplicadas. Estas funciones son las llamadas funciones especiales. En esta práctica utilizamos el paquete `orthopoly`, que evalúa simbólica y numéricamente alguna de esas funciones especiales.

19.1 Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre, $P_l(x)$, son soluciones particulares de la ecuación de Legendre:

$$P_l(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2l - 1)}{l!} \left(x^l - \frac{l(l - 1)}{2(2l - 1)} x^{l-2} + \frac{l(l - 1)(l - 2)(l - 3)}{2 \cdot 4(2l - 1)(2l - 3)} x^{l-4} - \dots \right)$$





Veamos que el polinomio de Legendre $P_3(x)$ es solución de la ecuación de Legendre para $l = 3$.

```
(%i1) load("orthopoly")$
```

```
(%i2) legendre_p(3,x);
```

```
(%o2)
```

$$-\frac{5(1-x)^3}{2} + \frac{15(1-x)^2}{2} - 6(1-x) + 1$$

```
(%i3) expand(%);
```

```
(%o3)
```

$$\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

```
(%i4) (1-x^2)*diff(legendre_p(3,x),x,2)-2*x*diff(legendre_p(3,x),x)+12*le
```

```
(%o4)
```

$$(15 - 15(1-x))(1-x^2) - 2 \left(\frac{15(1-x)^2}{2} - 15(1-x) + 6 \right) x + 12 \left(-\frac{5(1-x)^3}{2} + \frac{15(1-x)^2}{2} - 6(1-x) + 1 \right)$$

```
(%i5) ratsimp(%);
```

```
(%o5)
```

$$0$$

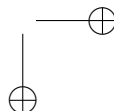
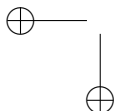
19.2 Polinomios y funciones de Hermite

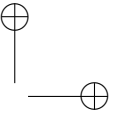
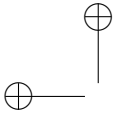
Los polinomios de Hermite, $H_n(x)$ $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \dots$$

son soluciones particulares de la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$





Ejemplo: El polinomio $H_3(x)$ es el polinomio de Hermite de grado 3. Comprobamos que es solución de la ecuación de Hermite.

```
(%i1) load("orthopoly")$
(%i2) hermite(3,x);
(%o2)

$$-12x \left(1 - \frac{2x^2}{3}\right)$$

(%i3) is(ratsimp(diff(hermite(3,x),x,2)-2*x*diff(hermite(3,x),x)+6*hermite(3,x)),0))
(%o3)
true
```

Sea la ecuación

$$y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0,$$

si hacemos el cambio de variable $y(x) = e^{-x^2/2}\nu(x)$, la ecuación se transforma en

```
(%i6) kill(all);
(%i1) remove(all,dependency)$
(%i2) ec:'diff(y,x,2)+(1-x^2+2*n)*y=0$
(%i3) subst(%e^(-x^2/2)*nu(x),y,%);
(%o3)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \nu(x) \right) + (-x^2 + 2n + 1) e^{-\frac{x^2}{2}} \nu(x) = 0$$

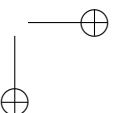
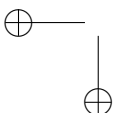
(%i4) ev(% ,diff);
(%o4)

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d^2}{dx^2} \nu(x) \right) - 2x e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d}{dx} \nu(x) \right) + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \nu(x) + (-x^2 + 2n + 1) e^{-\frac{x^2}{2}} \nu(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} \nu(x) = 0$$

(%i5) factor(%);
(%o5)

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{d^2}{dx^2} \nu(x) - 2x \left( \frac{d}{dx} \nu(x) \right) + 2n \nu(x) \right) = 0$$

```

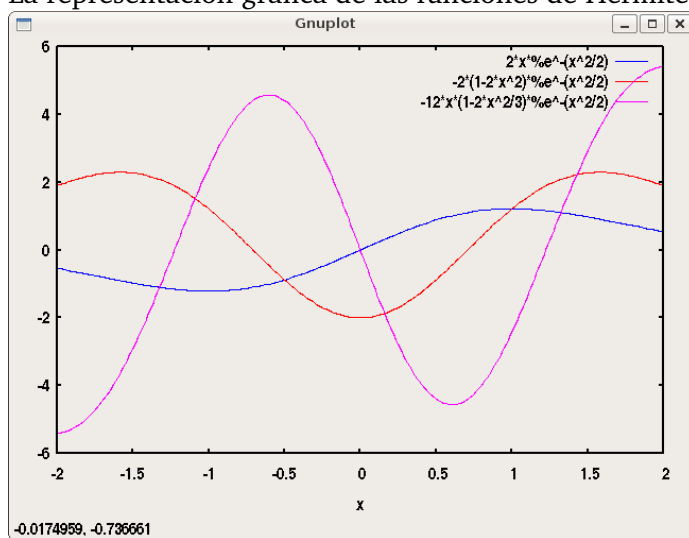


La expresión que está entre paréntesis es la ecuación de Hermite. Unas soluciones particulares de la ecuación son

$$y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

que son las llamadas funciones de Hermite.

La representación gráfica de las funciones de Hermite para $n = 1, 2, 3$:



Las funciones de Hermite $\psi_n(x) = e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha}x)$, siendo $\alpha = \sqrt{km/h^2}$, son soluciones de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico en mecánica cuántica

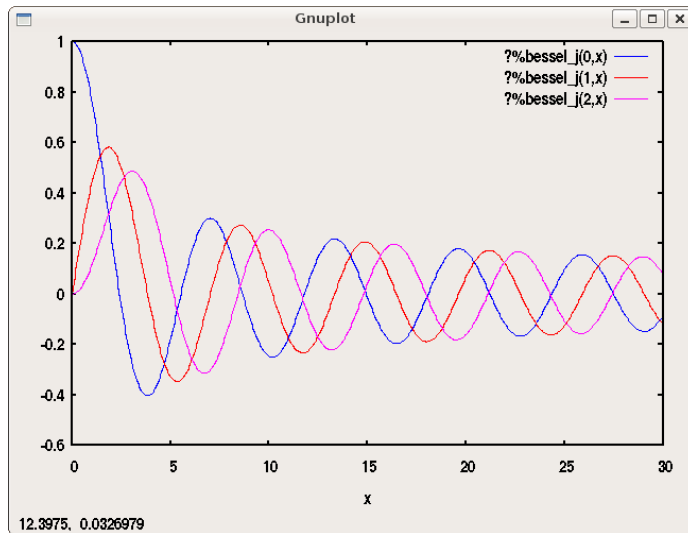
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi.$$

19.3 Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel de primera clase o especie

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

son soluciones de la ecuación de Bessel. Se pueden representar gráficamente.



Las funciones de Bessel de orden semientero $J_{l+1/2}(x)$ pueden expresarse mediante funciones elementales, siendo

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

Para que las funciones de Bessel se desarrollen en su forma trigonométrica usamos `besselexpand`:

```
(%i19)  besselexpand:true$
(%i20)  bessel_j(1/2,x);
(%o20)
```

$$\frac{\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$$

```
(%i21)  bessel_j(3/2,x);
(%o21)
```

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{x} \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right)}{\sqrt{\pi}}$$

La función $\sqrt{x}J_{3/2}(x)$ es solución de la ecuación de Bessel $x^2y'' + (x^2 - 2)y = 0$:

```
(%i16)  besselexpand:true$
(%i17)  y:sqrt(x)*bessel_j(3/2,x)$
```

```
(%i18) is(ratsimp(x^2*diff(y,x,2)+(x^2-2)*y)=0);
(%o18)
true
```

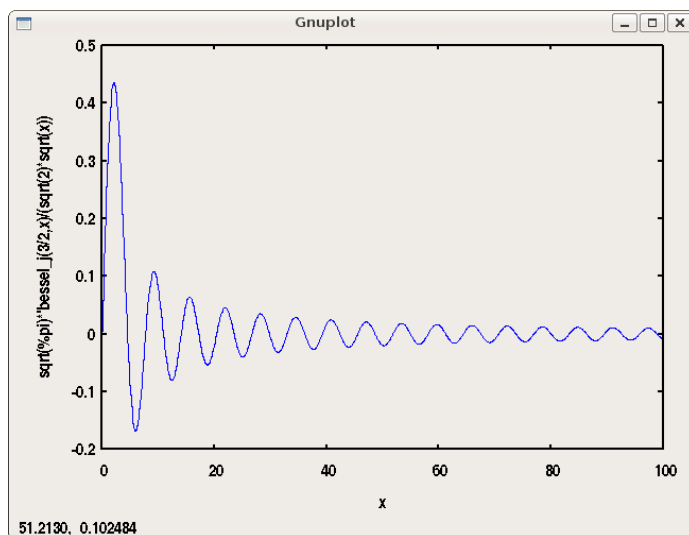
Maxima emplea rutinas especiales para evaluar las funciones especiales en puntos determinados.

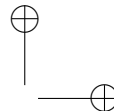
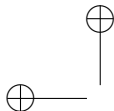
```
(%i4) float(bessel_j(1,1));
(%o4)
0,4400505857449335
```

Las funciones de orden semientero son las funciones de Bessel que aparecen en el método de ondas espaciales en la teoría de procesos de difusión. En este caso se presentan de la forma:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad \eta_l(x) = (-1)^{l+1} J_{-l-1/2}(x),$$

```
(%i6) plot2d(sqrt(%pi)/(2*x))*bessel_j(1,x),[x,0,100];
```





Soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series

Contenidos



1. Series de potencias
2. Puntos ordinarios de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal

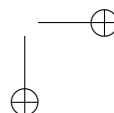
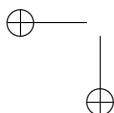
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

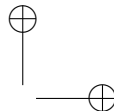
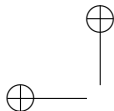
3. Soluciones en serie de potencias alrededor de un punto ordinario de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales.

En esta práctica utilizamos órdenes de `Maxima` para expresar sumas de series de potencias en una sola. Con ello comprobamos que una solución de una ecuación diferencial ordinaria que viene dada en serie de potencias es solución de la ecuación. Por último buscamos la relación de recurrencia que verifican los coeficientes de la solución en serie de potencias alrededor del punto ordinario 0, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Existen soluciones en serie de potencias alrededor de cero, cuando $p(x)$ y $q(x)$ son, por ejemplo, funciones polinómicas o que pueden desarrollarse en serie de potencias alrededor de cero.





20.1 Suma de series

Ejemplo: Expresamos en una sola serie de potencias la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}.$$

Definimos las dos sumas, que llamaremos S1 y S2:

```
(%i5) S1:sum(2*n*c[n]*x^(n-1),n,1,inf);  
(%o5)
```

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

```
(%i6) S2:sum(6*c[n]*x^(n+1),n,0,inf);  
(%o6)
```

$$6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

En las dos sumas debe aparecer la misma potencia de x en el término general de la serie, por lo tanto tendremos que correr el índice de la suma en una o en las dos series.

El término general de S1 es $2nc_n x^{n-1}$ y la potencia de x en este término es $n-1$ y el término general de S2 es $6c_n x^{n+1}$, con potencia de x , $n+1$.

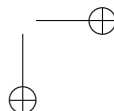
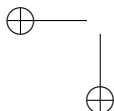
Expresamos, en las dos series, el término general con potencia de x igual a k . Para ello tendremos que variar el índice en S1, $n-1=k$, y en S2, $n+1=k$.

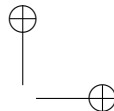
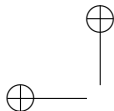
Las podemos cambiar con la orden `changevar(exp,f(n,k),k,n)` que hace en la expresión `exp` el cambio de variable $f(n,k)=0$. La nueva variable es k . Así, en S1, puede ser $f(n,k)=n-1-k$, y en S2, $f(n,k)=n+1-k$.

```
(%i8) S1:changevar(S1,n-1-k,k,n);  
(%o8)
```

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

```
(%i9) S2:changevar(S2,n+1-k,k,n);
```





(%o9)

$$6 \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k$$

Introducimos las constantes dentro de cada sumatorio con la orden `intosum`:

(%i10) `S1:intosum(S1);`

(%o10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2 (k+1) c_{k+1} x^k$$

(%i11) `S2:intosum(S2);`

(%o11)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6 c_{k-1} x^k$$

Por último usamos la orden `sumcontract` que nos permite expresar las dos sumas en una sola.

(%i12) `sumcontract(S1+S2);`

(%o12)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 (k+1) c_{k+1} x^k + 6 c_{k-1} x^k + 2 c_1$$

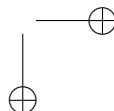
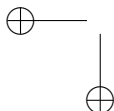
A veces, en vez de correr el índice en las dos sumas, nos interesa hacerlo solo en una. Por ejemplo, cambiamos solo en $S1$, $n-1 = k+1$, para expresar la potencia de x como en $S2$.

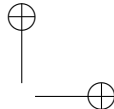
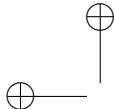
(%i13) `kill(all)$`

(%i1) `S1:sum(2*n*c[n]*x^(n-1),n,1,inf)$`

(%i2) `S2:sum(6*c[n]*x^(n+1),n,0,inf)$`

(%i3) `S1:changevar(S1,n-k-2,k,n);`





```
(%o3)
```

$$2 \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) c_{k+2} x^{k+1}$$

Para que la orden `sumcontract` haga efecto, debe aparecer en las dos series el índice expresado con la misma letra (en $S2$ es n y en $S1$ ahora es k). Debemos renombrar el índice de $S2$ y volverlo a nombrar n . Para ello (ahora o al principio del ejercicio) imponemos nuestras preferencias en cuanto a índices. Esto se hace con la orden `niceindicespref:[indice1, indice2, ..., indicen]`. A continuación, la orden `niceindices(exp)` cambia el índice en `exp` según el orden que hemos elegido.

```
(%i8) niceindicespref:[n]$
```

```
(%i9) niceindices(S1);
```

```
(%o9)
```

$$2 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) c_{n+2} x^{n+1}$$

Así:

```
(%i10) S1:intosum(S1)$
```

```
(%i11) S2:intosum(S2)$
```

```
(%i12) sumcontract(S1+S2);
```

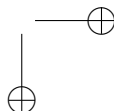
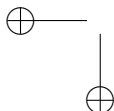
```
(%o12)
```

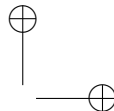
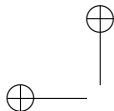
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2) c_{n+2} x^{n+1} + 6 c_n x^{n+1} + 2 c_1$$

Ejemplo: Comprobamos que $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ es solución de la ecuación $(x+1)y'' + y' = 0$.

Definimos y :

```
(%i2) y:sum((-1)^(n+1)/n*x^n,n,1,inf);
```





(%o2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Para comprobar que es solución debemos derivar y una y dos veces. Definimos dos variables dy y $dy2$ que contienen cada una de esas derivadas. Además, ajustamos el primer término de la serie en cada una de ellas.

(%i19) diff(y,x);

(%o19)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

(%i20) dy:sum((-1)^(n+1)*x^(n-1),n,1,inf);

(%o20)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

(%i21) diff(y,x,2);

(%o21)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) (-1)^{n+1} x^{n-2}$$

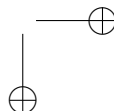
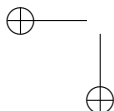
(%i22) dy2:sum((-1)^(n+1)*(n-1)*x^(n-2),n,2,inf);

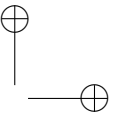
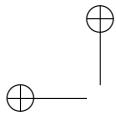
(%o22)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) (-1)^{n+1} x^{n-2}$$

Definimos tres variables $S1$, $S2$, $S3$ que contienen cada uno de los sumandos de la parte izquierda de la ecuación $S1 = x y''$, $S2 = y''$ y $S3 = y'$.

(%i25) S1:intosum(x*dy2);





(%o25)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

(%i26) S2:dy2;

(%o26)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) (-1)^{n+1} x^{n-2}$$

(%i27) S3:dy;

(%o27)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

Corremos el índice en S2:

(%i28) S2:changevar(S2,n-1-k,k,n);

(%o28)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k x^{k-1}$$

Cambiamos la letra del índice:

(%i29) niceindicespref:[n];

(%o29)

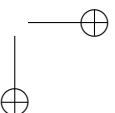
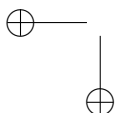
[n]

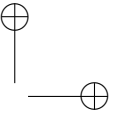
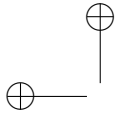
(%i30) S2:niceindices(S2);

(%o30)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n x^{n-1}$$

Por último sumamos los tres y comprobamos que la suma es cero:





```
(%i31) sumcontract(S1+S2+S3);  
(%o31)
```

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) (-1)^{n+1} x^{n-1} + (-1)^{n+1} x^{n-1} + n (-1)^n x^{n-1}$$

```
(%i32) factor(%);  
(%o32)
```

0

20.2 Soluciones en serie de potencias

Calcularemos la **relación de recurrencia** que verifican los coeficientes a_n de la solución en serie de potencias $y = \sum a_n x^n$ de una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Ejemplo: Sea la ecuación $y'' + x y' - y = 0$, busquemos la relación de recurrencia de los coeficientes a_n de la solución $\sum a_n x^n$.

Definimos la función en forma de serie de potencias:

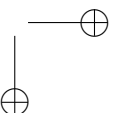
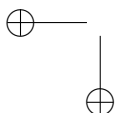
```
(%i33) kill(all)$  
(%i1) y:sum(a[n]*x^n,n,0,inf);  
(%o1)
```

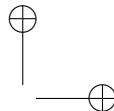
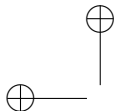
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Definimos a continuación tres variables $s1$, $s2$ y $s3$ que contienen cada una un sumando de la ecuación: $s1 = y''$, $s2 = x y'$ y $s3 = -y$.

Derivamos y dos veces para obtener $s1$.

```
(%i2) dy2:diff(y,x,2);
```





(%o2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

Observamos que, en realidad, la serie debe empezar por $n = 2$ en vez de $n = 0$.
Eso lo cambiamos con la orden `subst`

(%i3) `s1:subst(2,0,dy2);`

(%o3)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

Calculamos $s2$ y $s3$:

(%i4) `diff(y,x);`

(%o4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(%i5) `subst(1,0,%);`

(%o5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(%i6) `s2:intosum(x*%);`

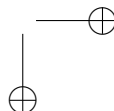
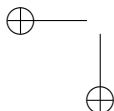
(%o6)

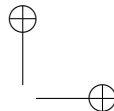
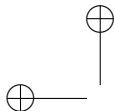
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

(%i7) `s3:intosum(-y);`

(%o7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^n$$





A continuación corremos el índice en s_2 y s_3 . En ambos casos consideramos el cambio $n = k - 2$:

```
(%i8) s2:changevar(s2,n+2-k,k,n);
(%o8)
```

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-2) a_{k-2} x^{k-2}$$

```
(%i9) s3:changevar(s3,n+2-k,k,n);
(%o9)
```

$$-\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2}$$

```
(%i10) niceindicespref:[n];
(%o10)
```

$$[n]$$

```
(%i11) s2:niceindices(s2);
(%o11)
```

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n-2}$$

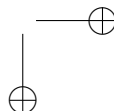
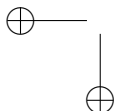
```
(%i12) niceindices(s3);
(%o12)
```

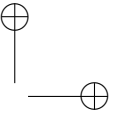
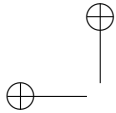
$$-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

```
(%i13) s3:intosum(s3)$
```

Por último, usamos la orden `sumcontract(exp)` para expresar la suma en una sola serie de potencias:

```
(%i14) sumcontract(s1+s2+s3);
```





(%o14)

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-2} - a_{n-2} x^{n-2} + 2 a_2 - a_0$$

Todos los coeficientes deben ser cero. Por tanto, tenemos $a_2 = 1/2 a_0$ y para los demás, desde $n = 3$ cumplen la relación de recurrencia:

(%i18) `rec: (n-1)*n*a[n] + (n-2)*a[n-2] - a[n-2];`

(%o18)

$$(n-1) n a_n + (n-2) a_{n-2} - a_{n-2}$$

(%i19) `solve(rec=0, a[n]);`

(%o19)

$$\left[a_n = -\frac{(n-3) a_{n-2}}{n^2 - n} \right]$$

(%i20) `factor(%);`

(%o20)

$$\left[a_n = -\frac{(n-3) a_{n-2}}{(n-1) n} \right]$$

Y así obtenemos la relación de recurrencia que siguen los coeficientes a partir de $n = 3$. Aunque la relación también es válida para $n = 2$.

Observamos que los coeficientes impares van a ser todos cero a partir de a_3 . Además, como no hay ecuaciones que deban verificar a_0 ni a_1 , ambas son constantes arbitrarias. Una vez que a_0 queda asignado, todos los demás coeficientes pares quedan determinados.

Definamos los términos:

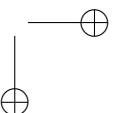
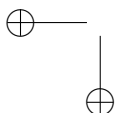
(%i35) `a[0]:a0$`

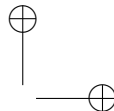
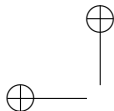
(%i36) `a[1]:a1$`

(%i37) `a[n]:=-(n-3)/(n*(n-1))*a[n-2];`

(%o37)

$$a_n := \frac{-(n-3)}{n(n-1)} a_{n-2}$$



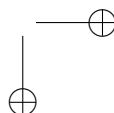
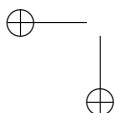


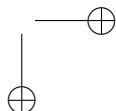
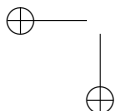
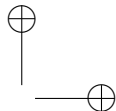
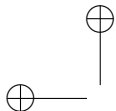
Así, podremos calcular los términos que queramos de la solución. Por ejemplo, calculamos hasta el término con potencia de x 10:

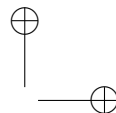
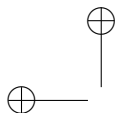
```
( %i34) sum(a[n]*x^n,n,0,10);
```

```
( %o34) 
$$\frac{a_0 x^{10}}{34560} - \frac{a_0 x^8}{2688} + \frac{a_0 x^6}{240} - \frac{a_0 x^4}{24} + \frac{a_0 x^2}{2} + a_1 x + a_0$$

```

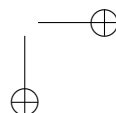
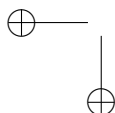


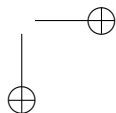
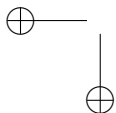
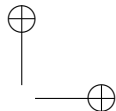
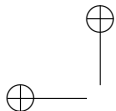


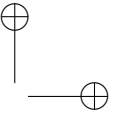
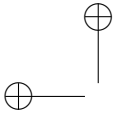


Parte VII

Cálculo Numérico







Error de redondeo.

Contenidos



1. Presición en el cálculo.
 2. Error de redondeo.
 3. Error absoluto y relativo.
-

Maxima ofrece precisión arbitraria con la función **bfloat()**, dicha función la podemos obtener pinchando en **Numérico**→**Establecer precisión**. La variable que controla el número de decimales es **fpprec**, que por defecto vale 16.

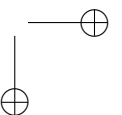
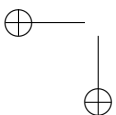
```
(%i124) fpprec;
```

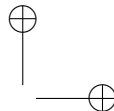
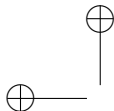
```
(%o124)
```

```
6
```

Para calcular el valor de $1 + \sqrt{2}$ con 50 cifras decimales hay que asignarle a la variable **fpprec** el valor 50; el operador ":" se utiliza para asignaciones de expresiones o variables

```
(%i125) fpprec:100;
```





```
(%o125)
```

```
100
```

y a continuación realizar el cálculo con la función **bfloat()**

```
(%i125) bfloat(1+sqrt(2));
```

```
(%o126) 2.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379
```

Observar que un resultado con el formato **bfloat()** se escribe con la letra B en lugar de la E para indicar el exponente.

Ejemplo 1. Calcular el número $\sqrt{2}$ con redondeo a 6 dígitos.

```
(%i127) fpprec:6;
```

```
(%o127)
```

```
6
```

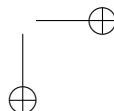
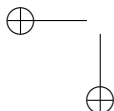
```
(%i128) bfloat(sqrt(2));
```

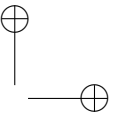
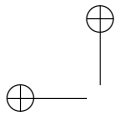
```
(%o128)
```

```
1.41421b0
```

Ejemplo 2. Calcular una aproximación decimal del número $\sqrt{4} - \sqrt{4,000001}$
Con la precisión que tiene el programa por defecto

```
(%i128) sqrt(4)-sqrt(4.000001),numer;
```





```
(%o129)                                     - 2.4999998426977754E-7
```

Con redondeo a 6 dígitos:

```
(%i130) fpprec:6$
```

```
(%i131) a:bfloat(sqrt(4));
```

```
(%o131)                                     2.0b0  
(%i132) b:bfloat(sqrt(4.000001));
```

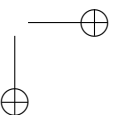
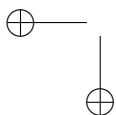
```
Warning: Float to bigfloat conversion of 2.0000002499999843  
(%o132)                                     2.0b0  
(%i133) a-b;
```

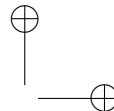
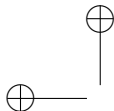
```
(%o133)                                     0.0b0
```

Vemos que el último resultado da cero. ¿Qué ocurre si multiplicamos $\sqrt{4} - \sqrt{4.000001}$ por 10^{10} ?

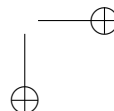
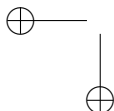
Ejercicios.

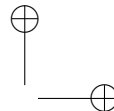
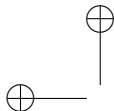
1. Calcula los valores de $a = 1278/3097$, $b = \sqrt{23}$ y $(a^3 - 23/b)/(a^2 - b^2)$ con 7 cifras decimales exactas.
2. ¿Qué número es mayor π^3 o 3^π ?
3. Calcula e/π con 100 cifras decimales.





4. Suponiendo que el valor para un cálculo debería ser $0,10 \times 10^{10}$, pero se obtuvo el resultado de $0,08 \times 10^{10}$. Calcular el error absoluto y el error relativo.
5. Calcula el error absoluto y error relativo en las aproximaciones de
 - a) π y $22/7$
 - b) π y $3,131622$
 - c) e y $2,718$.
6. Consideremos el número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calcularlo:
 - a) Con un redondeo de cinco cifras tras la coma decimal.
 - b) Con un redondeo de doce cifras tras la coma decimal.
7. Use una aritmética de redondeo a tres cifras para los siguientes cálculos. Calcule el error absoluto y relativo con el valor exacto determinado a por lo menos cinco cifras.
 - a) $133 + 0,921$
 - b) $-10\pi + 6e - 3/62$.





22

Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 1.

Contenidos



1. El método de bisección.

22.1 Método de bisección.

En esta práctica calculamos soluciones numéricas de ecuaciones no lineales por los métodos vistos en clase pero desde el punto de vista gráfico, para ello tenemos que usar el comando **plot2d** con la opción `[gnuplot_preamble,"set zeroaxis"]` que hace que el programa dibuje el eje de abscisas (el cual es imprescindible en esta práctica), para escribir dicha opción con el **wxMaxima** basta con ir a **Gráficos2D** → **Opciones** → **set zeroaxis**.

1.El método de bisección. Veamos gráficamente cómo aproximar por el método de bisección la solución de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$

Ejemplo 1.

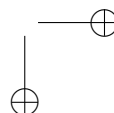
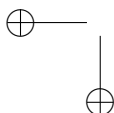
Vamos a encontrar una raíz de $6x - e^x = 0$ en el intervalo $[2, 3]$.

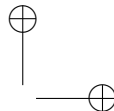
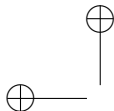
Empezamos con el intervalo $[2, 3]$

```
(%i1) a1:2$
```

```
(%i2) b1:3$
```

```
(%i3) f(x):=6*x-%e^x;
```





```
( %o3)
```

$$f(x) := 6x - e^x$$

Dibujamos $f(x)$ en el intervalo $[a1, b1]$

```
plot2d(f(x),[x,a1,b1]);
```

Se observa en la gráfica que $f(x)$ corta al eje de abcisas en la segunda mitad del intervalo, esto es en $[(a1 + b1)/2, b1]$.

```
( %i4)  a2:(a1+b1)/2,numer;
```

```
( %o4)
```

2,5

```
( %i5)  b2:b1,numer;
```

```
( %o5)
```

3

```
plot2d(f(x),[x,a2,b2])
```

$f(x)$ vuelve a cortar al eje de abcisas en la segunda mitad del intervalo

```
( %i6)  a3:(a2+b2)/2;
```

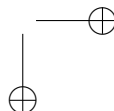
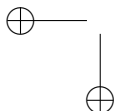
```
( %o6)
```

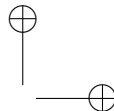
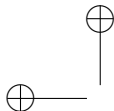
2,75

```
( %i7)  b3:b2;
```

```
( %o7)
```

3





```
plot2d(f(x),[x,a3,b3]);
```

Ahora $f(x)$ corta al eje de abcisas en la primera mitad del intervalo

```
( %i8)  a4:a3;
```

```
( %o8)
```

2,75

```
( %i9)  b4:(a3+b3)/2;
```

```
( %o9)
```

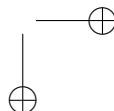
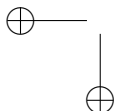
2,875

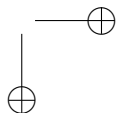
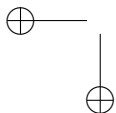
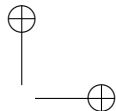
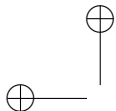
Después de cuatro iteraciones podríamos decir que una solución aproximada a $f(x) = 0$ es $x = (a4 + b4)/2$

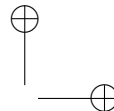
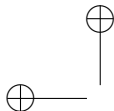
```
( %i10)  (a4+b4)/2;
```

```
( %o10)
```

2,8125







23

Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 2.

Contenidos



1. La regla falsi.

23.1 Regula Falsi.

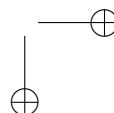
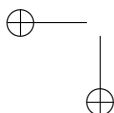
En esta práctica calculamos soluciones numéricas de ecuaciones no lineales por los métodos vistos en clase pero desde el punto de vista gráfico, para ello tenemos que usar el comando **plot2d** con la opción `[gnuplot_preamble,"set zeroaxis"]` que hace que el programa dibuje el eje de abcisas (el cual es imprescindible en esta práctica), para escribir dicha opción con el **wxMaxima** basta con ir a **Gráficos2D** → **Opciones** → **set zeroaxis**.

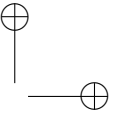
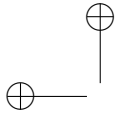
2. La regla falsi. Sabemos que para calcular una solución de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)f(b) < 0$ podemos utilizar el método de bisección (como hemos visto en el apartado anterior), pero también existe el método de la regla falsi, que en vez de calcular los el punto medio del intervalo $[a, b]$ calcula el punto de corte de la secante a $f(x)$ en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje de abcisas. En esta práctica vamos a ver geométricamente dicho método.

Ejemplo 2

Vamos a encontrar una raíz de $6x - e^x = 0$ en el intervalo $[2, 3]$.

```
(%i1) a1:2$  
(%i2) b1:3$
```





```
( %i3)  f(x):=6*x-%e^x;  
( %o3)
```

$$f(x) := 6x - e^x$$

Calculamos la recta que une los puntos $(2, f(2))$ y $(3, f(3))$

```
( %i4)  r1(x):=f(a1)+(x-a1)*(f(b1)-f(a1))/(b1-a1);  
( %o4)
```

$$r1(x) := f(a1) + \frac{(x - a1)(f(b1) - f(a1))}{b1 - a1}$$

Ahora dibujamos las funciones $f(x)$ y $r1(x)$ en el intervalo $[2, 3]$.

```
plot2d([f(x),r1(x)],[x,a1,b1]);
```

Por la gráfica se ve que la solución de $f(x) = 0$ está en el intervalo $[p1, b1]$ siendo $p1$ el punto de corte de $r(x)$ con el eje OX eje de abscisas $p1 = (a1f(b1) - b1f(a1))/(f(b1) - f(a1))$.

Al ser el extremo izquierdo del intervalo donde está la solución, lo llamamos $a2$.

```
( %i5)  a2:(a1*f(b1)-b1*f(a1))/(f(b1)-f(a1)),numer;  
( %o5)
```

$$2,6885622496471409$$

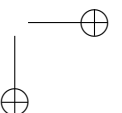
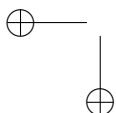
```
( %i6)  b2:b1;  
( %o6)
```

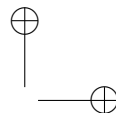
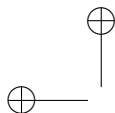
$$3$$

y ahora repetimos el proceso de antes para el nuevo intervalo

```
( %i7)  r2(x):=f(a2)+(x-a2)*(f(b2)-f(a2))/(b2-a2);  
( %o7)
```

$$r2(x) := f(a2) + \frac{(x - a2)(f(b2) - f(a2))}{b2 - a2}$$

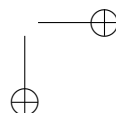
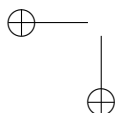


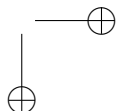
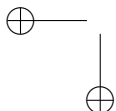
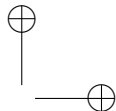
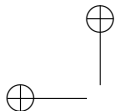


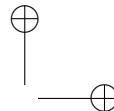
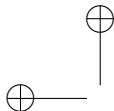
```
plot2d([f(x),r2(x)],[x,a2,b2]);
```

Otra vez el intervalo es $[p2, b]$ además se observa que ahora las dos gráficas están más próximas.

Seguimos el proceso hasta que se vea que las dos gráficas cortan al eje OX prácticamente en el mismo punto (que es la solución de $f(x) = 0$ buscada).







24

Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 3.

Contenidos



1. El método de Newton.

24.1 Método de Newton.

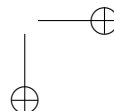
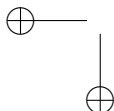
En esta práctica calculamos soluciones numéricas de ecuaciones no lineales por los métodos vistos en clase pero desde el punto de vista gráfico, para ello tenemos que usar el comando **plot2d** con la opción `[gnuplot_preamble,"set zeroaxis"]` que hace que el programa dibuje el eje de abcisas (el cual es imprescindible en esta práctica), para escribir dicha opción con el **wxMaxima** basta con ir a **Gráficos2D** → **Opciones** → **set zeroaxis**.

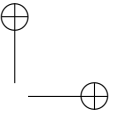
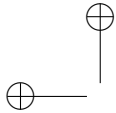
3. El método de Newton.

Para calcular una aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ por el método de Newton cogemos un punto de dicho intervalo p_0 y construimos una sucesión de aproximaciones (p_n) de tal forma que p_n es el punto de corte de la tangente a $f(x)$ en el punto p_{n-1} con el eje de abcisas.

En este apartado vamos a ver cómo se obtienen gráficamente dichas aproximaciones.

Ejemplo 3. Sea la ecuación $e^{-x} - x = 0$, queremos aproximar la solución de dicha ecuación en el intervalo $[0, 1]$, para ello, cogemos un punto $p_0 = 0,5$ del intervalo $[0, 1]$





```
(%i1) p0:0.5;  
(%o1)
```

0,5

Consideramos ahora la tangente a $f(x) = e^{-x} - x$ en p_0 , $m_0(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0)$

```
(%i2) f(x):=%e^(-x)-x;  
(%o2)
```

$f(x) := e^{-x} - x$

```
(%i3) derf:diff(f(x),x);  
(%o3)
```

$-e^{-x} - 1$

```
(%i4) derp0:derf,x=p0;  
(%o4)
```

-1,6065306597126334

```
(%i5) m0(x):=f(p0)+derp0*(x-p0);  
(%o5)
```

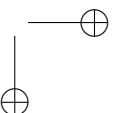
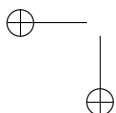
$m_0(x) := f(p_0) + \text{derp}_0 (x - p_0)$

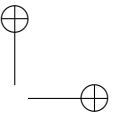
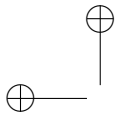
Dibujamos en un mismo gráfico las funciones $f(x)$ y $m_0(x)$ en el intervalo $[0, 1]$
`plot2d([f(x),m0(x)],[x,0,1]);`

Se observa como las dos gráficas cortan al eje de abcisas en puntos muy próximos

Ahora calculamos $p_1 = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ y consideramos la tangente a $f(x)$ en p_1 $m_1(x) = f(p_1) + f'(p_1)(x - p_1)$ y comparamos su gráfica con la de $f(x)$.

```
(%i6) p1:p0-f(p0)/derp0;
```





(%o6)

0,56631100319721817

(%i7) derp1:derf, x=p1;

(%o7)

-1,5676155130032381

(%i8) m1(x):=f(p1)+derp1*(x-p1);

(%o8)

$m1(x) := f(p1) + \text{derp1} (x - p1)$

plot2d([f(x),m1(x)],[x,0,1]);

Podemos hacer una iteración más.

(%i9) p2:p1-f(p1)/derp1;

(%o9)

0,56714316503486217

(%i10) derp2:derf, x=p2;

(%o10)

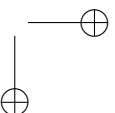
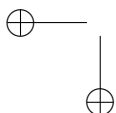
-1,5671433615153338

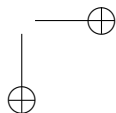
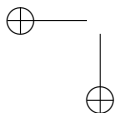
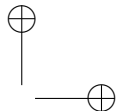
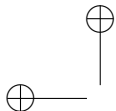
(%i11) m2(x):=f(p2)+derp2*(x-p2);

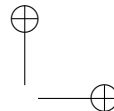
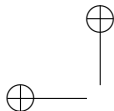
(%o11)

$m2(x) := f(p2) + \text{derp2} (x - p2)$

plot2d([f(x),m2(x)],[x,0,1]);







25

Métodos de resolución de ecuaciones no lineales 4.

Contenidos



1. Problema del punto fijo.

25.1 Método del Punto Fijo.

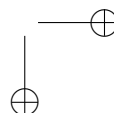
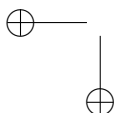
En esta práctica calculamos soluciones numéricas de ecuaciones no lineales por los métodos vistos en clase pero desde el punto de vista gráfico, para ello tenemos que usar el comando **plot2d** con la opción `[gnuplot_preamble,"set zeroaxis"]` que hace que el programa dibuje el eje de abscisas (el cual es imprescindible en esta práctica), para escribir dicha opción con el **wxMaxima** basta con ir a **Gráficos2D** → **Opciones** → **set zeroaxis**.

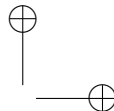
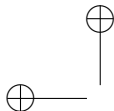
El método del punto fijo. Con este método calculamos una aproximación a la solución de la ecuación $g(x) = x$ en un intervalo $[a, b]$, para ello cogemos un punto de dicho intervalo p_0 y construimos una sucesión de aproximaciones (p_n) de tal forma que $p_{n+1} = g(p_n)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4 Aproximamos la solución de la ecuación $e^{-x} = x$ en el intervalo $[0, 1]$, para ello introducimos la función $g(x) = e^{-x}$.

```
( %i1)  g(x) := %e^(-x) ;  
( %o1)
```

$$g(x) := e^{-x}$$





introducimos el valor inicial $p_0 = 0,5$, y calculamos, por ejemplo tres iteraciones.

```
(%i2) p0:0.5;
(%o2)
0,5

(%i3) p1:g(p0);
(%o3)
0,60653065971263342

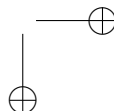
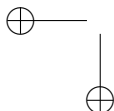
(%i4) p2:g(p1);
(%o4)
0,54523921189260505

(%i5) p3:g(p2);
(%o5)
0,57970309487806826
```

Podemos seguir haciendo iteraciones y vemos que la solución es aproximadamente 0,567, podemos también comprobarlo gráficamente. Dibujamos las funciones x y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

```
plot2d([x,g(x)],[x,0,1]);
```

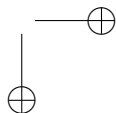
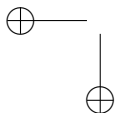
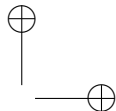
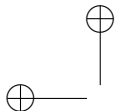
Ahora nos acercamos con el ratón al punto de corte de dichas funciones y en la esquina izquierda de abajo nos aparecen las coordenadas del punto que estamos señalando.

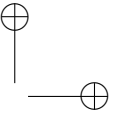
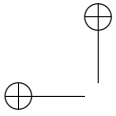




Ejercicios

1. Calcula una solución aproximada de la ecuación $\cos(x) - x = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante tres iteraciones de:
 - a) el método de bisección
 - b) la Regula Falsi
 - c) El método de Newton
 - d) A la vista de los resultados, ¿qué método aproxima mejor a la solución?, ¿cuál da la peor aproximación?
2. Dada la ecuación: $(x - 1)^3 - x - 1/2 = 0$
 - a) Realiza dos iteraciones del método de Newton para aproximar una solución de dicha ecuación en el intervalo $[0, 3]$, tomando como valor inicial $p_0 = 1$.
 - b) En vista de lo obtenido en apartado anterior. ¿Podemos decir que el método de Newton converge?. ¿Por qué?
3. Dada la ecuación $e^{-x} - x = 0$.
 - a) Calcula una solución aproximada de la ecuación en el intervalo $[0, 1]$ mediante tres iteraciones del método de la secante. Compárala con el ejemplo 3. ¿Qué método aproxima mejor, el de Newton o el de la secante?
 - b) Aproxima dicha ecuación por el método del punto fijo en $[0, 1]$.





Métodos de aproximación de funciones.

Contenidos

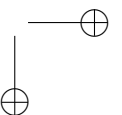
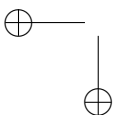


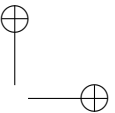
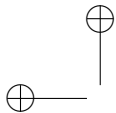
1. Aproximación de funciones por el polinomio de Taylor.
 2. Aproximación de funciones por el polinomio interpolación de Lagrange.
-

1. Por el polinomio de Taylor.

Una buena aproximación de una función en un punto es el polinomio de Taylor entorno a dicho punto. Veamos por ejemplo cómo obtener el polinomio de Taylor de $\cos(x)$ de orden cuatro con centro del desarrollo $x_0 = 0$, para lo cual tenemos que calcular todas las derivadas de $\cos(x)$ hasta el orden cuatro en $x_0 = 0$

```
(%i1) f(x):=cos(x);  
(%o1)  $f(x) := \cos x$   
  
(%i2) diff(f(x),x);  
(%o2)  $-\sin x$   
  
(%i3) der1:%,x=0;  
(%o3) 0
```





```
(%i4) diff(f(x),x,2);  
(%o4)  $-\cos x$ 
```

```
(%i5) der2:%,x=0;  
(%o5)  $-1$ 
```

```
(%i6) diff(f(x),x,3);  
(%o6)  $\sin x$ 
```

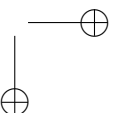
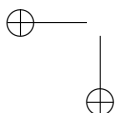
```
(%i7) der3:%,x=0;  
(%o7)  $0$ 
```

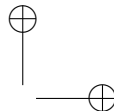
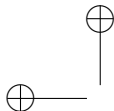
```
(%i8) diff(f(x),x,4);  
(%o8)  $\cos x$ 
```

```
(%i9) der4:%,x=0;  
(%o9)  $1$ 
```

Comparamos ahora $f(x)$ con su correspondiente polinomio de Taylor obtenido.

```
(%i10) a:%pi,numer;  
(%o10)  $3,1415926535897931$ 
```





```
plot2d([cos(x),p4(x)], [x,0,3*a], [gnuplot_preamble,"set zeroaxis"])
```

2. Por el polinomio de interpolación de Lagrange.

El polinomio de Taylor entorno a un punto, no es una buena aproximación a una función cuando nos alejamos de dicho punto. Surgen entonces los polinomios de interpolación de Lagrange, que utilizan valores de la función en más puntos.

El paquete **interpol** desarrolla el método de interpolación polinómica de Lagrange.

Ejemplo 1. Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ en el soporte de puntos $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

```
(%i11) load(interpol);  
(%o11)
```

```
/usr/share/maxima/5.13.0/share/numeric/interpol.mac
```

```
(%i12) f(x):=1/(x^2+1);  
(%o12)
```

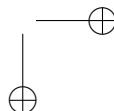
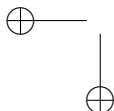
$$f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}$$

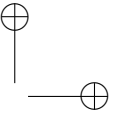
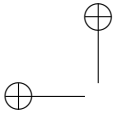
```
(%i13) S:[[-2,f(-2)],[-1,f(-1)],[0,f(0)],[1,f(1)],[2,f(2)]];  
(%o13)
```

$$\left[\left[-2, \frac{1}{5} \right], \left[-1, \frac{1}{2} \right], [0, 1], \left[1, \frac{1}{2} \right], \left[2, \frac{1}{5} \right] \right]$$

```
(%i14) lagrange(S);  
(%o14)
```

$$\frac{x^4}{10} - \frac{3x^2}{5} + 1$$





También podemos calcular el dicho polinomio siguiendo los pasos vistos en clase. El método de las diferencias divididas es el mejor para programarlo con el ordenador, lo vamos a programar usando la siguiente notación para las diferencias divididas.

$$f_i = f[x_i], \quad f_{ij} = f[x_i, x_j], \quad f_{ijk} = f[x_i, x_j, x_k], \dots$$

Veamos ahora un ejemplo: el polinomio de interpolación de $f(x) = 2^x$ en el soporte de puntos $S = \{-1, 0, 1\}$

```
(%i15)  f(x):=2^x;  
(%o15)
```

$$f(x) := 2^x$$

```
(%i16)  x0:-1;  
(%o16)
```

$$-1$$

```
(%i17)  x1:0;  
(%o17)
```

$$0$$

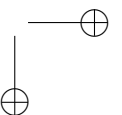
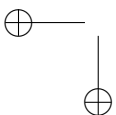
```
(%i18)  x2:1;  
(%o18)
```

$$1$$

```
(%i19)  f0:f(x0);  
(%o19)
```

$$\frac{1}{2}$$

```
(%i20)  f1:f(x1);
```



(%o20)

1

(%i21) f2:f(x2);

(%o21)

2

(%i22) f01:(f1-f0)/(x1-x0);

(%o22)

$\frac{1}{2}$

(%i23) f12:(f2-f1)/(x2-x1);

(%o23)

1

(%i24) f012:(f12-f01)/(x2-x0);

(%o24)

$\frac{1}{4}$

(%i25) p2(x):=f0+f01*(x-x0)+f012*(x-x0)*(x-x1);

(%o25)

$p2(x) := f0 + f01 (x - x0) + f012 (x - x0) (x - x1)$

Comparamos ahora la función propuesta con su correspondiente polinomio de Lagrange obtenido.

(%i29) plot2d([f(x),p2(x)], [x,x0,x2]);

Aproximamos ahora el valor $\sqrt{2}$ mediante dicho polinomio de Lagrange.

(%i26) p2(x),x=1/2,numer;

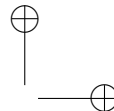
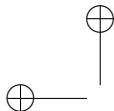
(%026)

1,4375



Ejercicios

1. Sean $f(x) = \frac{1}{2+x}$ y el soporte de puntos $S = \{-1, 0, 2, 3\}$.
 - a) Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 con centro del desarrollo $x_0 = -1$ de la función $f(x)$.
 - b) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x)$ en S directamente con el paquete **interpol** y por el método de las diferencias divididas.
 - c) Usa los polinomios anteriores para dar una aproximación al valor $\frac{1}{3}$, y calcula en cada caso los errores absoluto y relativo.
 - d) Representa gráficamente las tres funciones anteriores. ¿Cual de los dos polinomios aproxima mejor a la función?
2. Aproxima $\frac{1}{7}$ mediante el polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ en el soporte de puntos $S = \{1, 2, 4\}$, compáralo con la solución exacta. ¿Es buena aproximación?, ¿Por qué?



27

Integración numérica de funciones.

Contenidos



1. Formula de Romberg.
2. Formula del promedio.
3. Formula del trapecio.
4. Formula de Simpson.

27.1 Métodos de integración numérica.

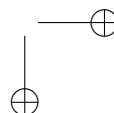
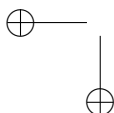
wxMaxima

En esta práctica calculamos soluciones numéricas de integrales definidas por los métodos vistos en clase; cuando dicha integral definida, no tenga una primitiva conocida, bien porque aún existiendo dicha primitiva, es una expresión tan complicada que es mejor no utilizarla.



Integración numérica.

Hay muchas ocasiones en las que no podemos calcular el valor exacto de una integral definida, bien porque la función no tenga una primitiva conocida, bien porque aún existiendo dicha primitiva, es una expresión tan complicada que es mejor no utilizarla. En todos estos casos está justificado el uso de la integración



numérica. El comando que dispone Maxima para resolver numéricamente una integral definida es **romberg**: `romberg(f(x),x,a,b)` : aproxima el valor de la integral definida de la función $f(x)$ entre a y b .

```
(%i1) romberg(sin(x),x,0,%pi);
(%o1)
2,000000016288042
```

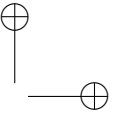
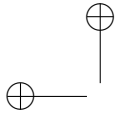
Definimos a continuación varias fórmulas de integración numérica bien conocidas, para aproximar la integral $\int_1^3 e^{-x^2} dx$.

```
(%i2) f(x):=exp(-x^2);
(%o2)
f(x):=exp(-x^2)
```

```
(%i3) ptomedio(a,b):=(b-a)*f((a+b)/2);
(%o3)
ptomedio(a,b):=(b-a)f((a+b)/2)
```

```
(%i4) trapecio(a,b):=(b-a)/2*(f(a)+f(b));
(%o4)
trapecio(a,b):=(b-a)/2*(f(a)+f(b))
```

```
(%i5) simpson(a,b):=(b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b));
(%o5)
simpson(a,b):=(b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b))
```



```
(%i6) ptomedio(1,3),numer;
(%o6)
0,036631277777468357

(%i7) trapecio(1,3),numer;
(%o7)
0,36800285097552904

(%i8) simpson(1,3),numer;
(%o8)
0,14708846884348858
```

Podemos también aproximar una integral definida mediante fórmulas de cuadratura de orden superior a la regla de Simpson. Veamos por ejemplo por una fórmula de cuadratura con 5 nodos.

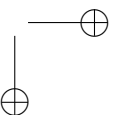
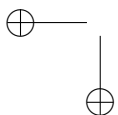
Ejemplo. Calcula un aproximación a la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ mediante la fórmula de cuadratura cerrada con 5 nodos.

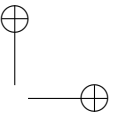
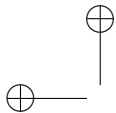
Introducimos los nodos.

```
(%i9) a:0;
(%o9)
0

(%i10) b:1;
(%o10)
1

(%i11) h:(b-a)/4;
(%o11)
1/4
```

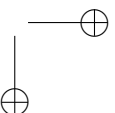
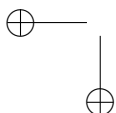


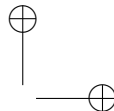
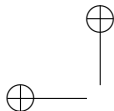


```
(%i12) x0:a;  
(%o12)  $0$   
  
(%i13) x1:a+h;  
(%o13)  $\frac{1}{4}$   
  
(%i14) x2:a+2*h;  
(%o14)  $\frac{1}{2}$   
  
(%i15) x3:a+3*h;  
(%o15)  $\frac{3}{4}$   
  
(%i16) x4:a+4*h;  
(%o16)  $1$ 
```

Calculamos el polinomio de interpolación de Lagrange en dichos nodos e integramos dicho polinomio.

```
(%i17) load(interpol)$  
  
(%i18) f(x):=%e^(x^2);  
(%o18)  $f(x) := e^{x^2}$ 
```





```
(%i19) S:[ [x0,f(x0)], [x1,f(x1)], [x2,f(x2)], [x3,f(x3)], [x4,f(x4)] ];  
(%o19)
```

$$\left[[0,1], \left[\frac{1}{4}, e^{\frac{1}{16}}\right], \left[\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{4}}\right], \left[\frac{3}{4}, e^{\frac{9}{16}}\right], [1,e] \right]$$

```
(%i20) lagrange(S);  
(%o20)
```

$$\frac{32ex^4}{3} - \frac{128e^{\frac{9}{16}}x^4}{3} + 64e^{\frac{1}{4}}x^4 - \frac{128e^{\frac{1}{16}}x^4}{3} + \frac{32x^4}{3} - 16ex^3 + \frac{224e^{\frac{9}{16}}x^3}{3} - 128e^{\frac{1}{4}}x^3 + 96e^{\frac{1}{16}}x^3 - \frac{80x^3}{3} + \frac{22ex}{3}$$

```
(%i21) expand(%);  
(%o21)
```

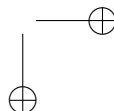
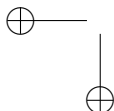
20

```
(%i22) integrate(%,x,0,1);  
(%o22)
```

21

```
(%i23) %,numer;  
(%o23)
```

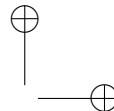
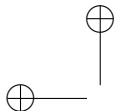
22



Ejercicios



1. Aproxima el valor de la integral $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$ mediante la regla del punto medio y la regla de Simpson. Compara ambas aproximaciones con la solución exacta.
2. Aproxima el valor de $I = \int_0^{22} \frac{1}{2+x} dx$, mediante la regla del trapecio y mediante la regla compuesta del trapecio con $n=11$. Compara ambas aproximaciones con la solución exacta.
3. Aproxima el valor de $I = \int_2^{14} e^{-x} dx$, mediante la regla de Simpson y por la fórmula de cuadratura cerrada con 4 nodos.



Resolución numéricas de ecuaciones diferenciales.



Contenidos

1. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
2. Método de Euler explícito.
3. El problema de Cauchy.

28.1 Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

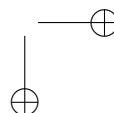
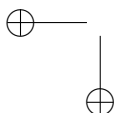
Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

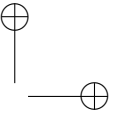
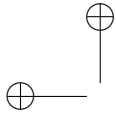
La mayoría de las ecuaciones no pueden ser resueltas de un modo formal. Es muy fácil encontrar ecuaciones para las que no exista un procedimiento analítico de resolución. En estas circunstancias debemos recurrir a un procedimiento numérico para encontrar una solución aproximada del problema.

La solución de un problema de Cauchy es una función. Al aplicar un método numérico, obtenemos aproximaciones de la solución en una serie de puntos, y a continuación construimos el polinomio que interpola las aproximaciones en dichos puntos.

En el siguiente ejemplo vemos cómo aproximamos mediante el método de Euler Explícito el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$





para $N = 3$ y después lo comparamos con la solución exacta mediante los errores relativos y la representación gráfica.

Introducimos los nodos $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ y la función $f(t, y)$ de nuestro problema.

```
(%i1) kill(y,f,t,p);
(%o1)

done

(%i2) f(t,y):=y;
(%o2)

f(t,y):=y

(%i3) h:1/3;
(%o3)

1
3

(%i4) t0:0;
(%o4)

0

(%i5) t1:t0+h;
(%o5)

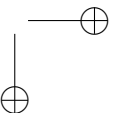
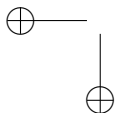
1
3

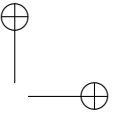
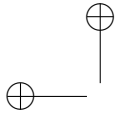
(%i6) t2:t0+2*h;
(%o6)

2
3

(%i7) t3:t0+3*h;
(%o7)

1
```





Aproximamos los valores de la función solución $y(t)$ en los puntos $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ por el método de Euler explícito (Recordamos que en este método $y_{n+1} = y_n + h * f(t_n, y_n)$).

```
(%i8)  y0:1;
(%o8)
1

(%i9)  y1:y0+h*f(t0,y0),numer;
(%o9)
1,3333333333333333

(%i10) y2:y1+h*f(t1,y1),numer;
(%o10)
1,7777777777777777

(%i11) y3:y2+h*f(t2,y2),nmer;
(%o11)
2,3703703703703702
```

Ahora calculamos la solución exacta del problema de Cauchy, para lo cual, puesto que estamos en wxMaxima, podemos pinchar en **Resolver EDO**.

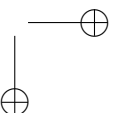
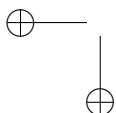
```
(%i12) solgeneral:ode2('diff(y,t)=f(t,y),y,t);
(%o12)

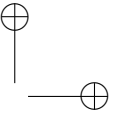
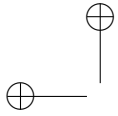
$$y = \%c e^t$$


(%i13) solgeneral,t=0,y=1;
(%o13)

$$1 = \%c$$

```





```
(%i14) solve(%,%c);  
(%o14) 
$$[\%c = 1]$$

```

```
(%i15) sol:solgeneral,%;  
(%o15) 
$$y = e^t$$

```

y los valores de dicha solución exacta en $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$.

```
(%i16) yt0:part(sol,2),t=t0,numer;  
(%o16) 
$$1$$

```

```
(%i17) yt1:part(sol,2),t=t1,numer;  
(%o17) 
$$1,3956124250860895$$

```

```
(%i18) yt2:part(sol,2),t=t2,numer;  
(%o18) 
$$1,9477340410546757$$

```

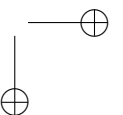
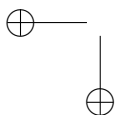
```
(%i19) yt3:part(sol,2),t=t3,numer;  
(%o19) 
$$2,7182818284590451$$

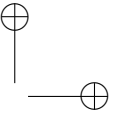
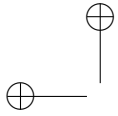
```

Calculamos ahora los errores relativos de dichas aproximaciones.

```
(%i20) er0:abs((y0-yt0)/yt0),numer;  
(%o20) 
$$0$$

```





```
(%i21) er1:abs((y1-yt1)/yt1),numer;  
(%o21)  
0,044624919234947706
```

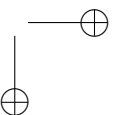
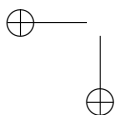
```
(%i22) er2:abs((y2-yt2)/yt2),numer;  
(%o22)  
0,087258455053169717
```

```
(%i23) er3:abs((y3-yt3)/yt3),numer;  
(%o23)  
0,12798947277880338
```

Construimos el polinomio que interpola los puntos $(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3)$ tal y como hicimos en la práctica 4.

```
(%i28) load(interpol);  
(%o28)  
  
/usr/share/maxima/5.13.0/share/numeric/interpol.mac  
  
(%i29) S:[[t0,y0],[t1,y1],[t2,y2],[t3,y3]];  
(%o29)  
  
 $\left[ [0, 1], \left[ \frac{1}{3}, 1, 3333333333333333 \right], \left[ \frac{2}{3}, 1, 7777777777777777 \right], [1, 2, 3703703703703702] \right]$   
  
(%i30) lagrange(S);  
(%o30)  

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} + \frac{47x}{54} + 1$$
  
  
(%i31) expand(%);
```



(%o31)

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3} + \frac{47x}{54} + 1$$

Una vez terminado todo lo referente al problema de Cauchy tenemos que vaciar la memoria de todas las variables que intervienen en nuestro problema.

(%i32) kill(y,f,t,p);

(%o32)

done



Ejercicios

1. Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 5y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 3/2 \end{cases}$$

- Calcula aproximaciones a la solución utilizando el método de Euler (explícito), tomando $N = 3$. Calcula los errores relativos que se cometen con dicha aproximación.
- Calcula aproximaciones a la solución utilizando el método de Heun, tomando $N = 3$. Calcula los errores relativos que se cometen con dicha aproximación. Recordamos que el método de Heun viene dado por la fórmula

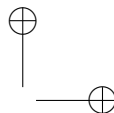
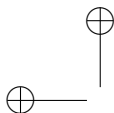
$$y_{n+1} = y_n + h/2 * (f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + h * f(t_n, y_n))).$$

- ¿Qué método aproxima mejor?. ¿Por qué?.

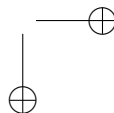
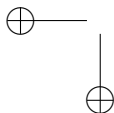
2. Aproxima la solución del problema de Cauchy

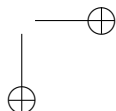
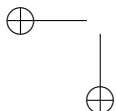
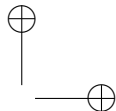
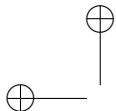
$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

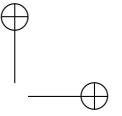
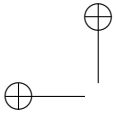
por el método del punto medio, tomando $N = 4$, donde dicho método viene dado por:



$$y_{n+1} = y_n + h * f(t_n + h/2, y_n + h/2 * f(t_n, y_n)).$$







Métodos de factorización de matrices.

Contenidos



1. Factorización LU.
 2. Factorización de Cholesky.
 3. El método n.
-

29.1 Métodos de factorización de matrices.

Factorización de matrices.

1. Factorización LU.

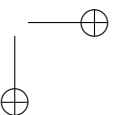
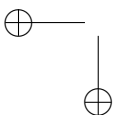
Dada una matriz cuadrada A la factorización LU consiste en calcular dos matrices L y U con L triangular inferior y U triangular superior y tales que $A = L.U$. El maxima calcula dicha factorización directamente con el uso de comandos de la siguiente forma:

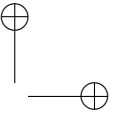
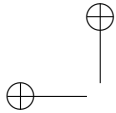
Ejemplo 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vamos a realizar su factorización LU

```
(%i2) load(linearalgebra)$
```





```
(%i3) A:matrix([2,0,1],[2,2,3],[2,1,0]);  
(%o3)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i4) get_lu_factor(lu_factor(A));  
(%o4)
```

$$\text{get_lu_factor} \left(\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}, [1, 2, 3], \text{generalring} \right] \right)$$

y el programa devuelve una lista con tres matrices donde L es el producto de las dos primeras matrices y U es la tercera matriz.

```
(%i4) L:%o7[1].%o7[2]  
(%i5) U:%o7[3]
```

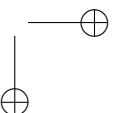
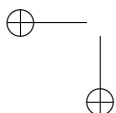
Comprobamos ahora que $A = L.U$

```
(%i6) A=L.U
```

2. Factorización de Cholesky. La factorización de Cholesky es una factorización parecida a la anterior, para matrices simétricas y en este caso una matriz A se descompone en la forma $A = B.B^T$ con B triangular inferior.

El Maxima calcula dicha factorización directamente con el uso de comandos de la siguiente forma:

```
(%i7) load(cholesky)$  
(%i8) A:matrix([1,2,0],[2,5,-1],[0,-1,2])  
(%i9) cholesky(A)
```



y el programa devuelve una matriz que es precisamente la matriz B de la factorización.

```
(%i10) B:%o13
```

Comprobamos ahora que $A = B.B^T$

```
(%o11) A=B.transpose(B)
```

Ejercicios



1. Realiza la factorización LU y de Cholesky, de las siguientes matrices en los casos que se pueda. Comprueba que dicha factorización está bien hecha.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$